Richiami di Fluidodinamica[1]

[1] Note tratte dalle dispense del corso di *Fluidodinamica* del Prof. Camussi, AA2007-2008, Facoltà di Ingegneria, Università Roma Tre

Capitolo 1

Equazioni della Fluidodinamica e teoremi sui vortici

Le equazioni di conservazione o di bilancio possono essere espresse in forma differenziale od integrale. Si utilizza la forma differenziale quando siamo interessati a studiare i dettagli locali delle flusso e vogliamo conoscere i campi delle varie proprietà del flusso. Necessitiamo in tal caso di equazioni che relazionino le varie proprietà in un dato punto.
Si utilizza la forma integrale quando siamo interessati a fenomeni fluidodinamici globali in un certo volume finito e non ai dettagli locali del flusso. Lo studio di dettaglio, (quindi lo studio differenziale), e' spesso reso necessario dalla contingenza che fenomeni locali , quali distacchi dalla vena fluida, instabilita', transizione, possono determinare comportamenti completamente diversi a livello globale. Pertanto nel seguito tutte le equazioni saranno scritte sia in forma integrale che differenziale.

1.1 Equazione di conservazione della massa

Il principio della conservazione della massa, nel caso di un fluido in moto, si esprime dicendo che la massa di un sistema arbitrario in moto resta invariata nel tempo: $\frac{dM}{d\,t} = 0$,

La variabile estensiva massa è definita come $B_s = \iiint\limits_{v(t)} \rho dv = M$, mentre la corrispondente variabile intensiva è b=1

Si noti che la derivata è una derivata totale in una descrizione Lagrangiana. Tale derivata va riportata in descrizione Euleriana mediante il teorema di trasporto di Reynolds

$$\frac{DB_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{v_0} \rho b dv + \oiint\limits_{S_0} \rho b\vec{u}\cdot\vec{n} dS = \iiint\limits_{v_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dv + \iiint\limits_{v_0} \vec{\nabla}\cdot(\rho b\vec{u}) dv$$

1.1.1 Forma integrale

Dal teorema di trasporto di Reynolds sostituendo *a b* => 1 si ha che :

$$\boxed{\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{v_0} \rho\, dv + \oiint_{S_0} \rho \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = 0}$$

che esprime la conservazione della massa in forma integrale. Cioé che la variazione nel tempo della massa nel volume di controllo eguaglia il flusso di massa attraverso la superficie di controllo.

1.1.2 Forma differenziale

Discende da : $\dfrac{dM}{d\,t} = \displaystyle\iiint_{v_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{u} \right) \right] dv = 0$

data l'arbitrarietà del volume di controllo :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

che può essere anche scritta come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\, \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

oppure con la derivata sostanziale

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0}$$

1.2 Equazione di bilancio della quantità di moto

L'equazione di bilancio della q.d.m. per un fluido in moto, nella sua forma differenziale ed integrale, discende dalla legge di conservazione della quantità di moto per un sistema:

variazione nel tempo della q.d.m	=	somma delle forze di massa	+	somma delle forze di superf.

In questo caso quindi : $\vec{b} = \vec{u}$ e $\vec{B}_s = \displaystyle\iiint_{v_S} \rho \vec{u}\, dv$

$$\frac{d\vec{B}_s}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}_m + \vec{F}_s$$

Si intende per forza di superficie l'integrale esteso alla superficie del sistema del contributo del tensore delle tensioni (T):

$$\vec{F}_S = \oiint_{S_0} \overline{\overline{T}} \cdot dS = \oiint_{S_0} \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{v_0} \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}}\, dv$$

applicando il teorema della divergenza.
Per forze di volume si ha:

$$\vec{F}_m = \iint_{v_0} \rho \vec{f}\, dv = \iiint_{v_0} \rho \vec{g}\, dv$$

se il peso è l'unica forza di volume.

1.2.1 Forma integrale.

Applicando il teorema di trasporto di Reynolds :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{v_s(t)} \rho\vec{u} dv = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho\vec{u} dv + \oiint_{S_0} \rho\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \vec{F}_m + \vec{F}_s$$

che e' l'equazione cercata in termini integrali . L'equazione può anche essere scritta come segue:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho\vec{u}\, dv + \iint_{S_0} \rho\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{v_0} \rho \vec{f}\, dv + \oiint_{S_0} \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} dS}$$

essendo:

$$\overline{\overline{T}} = -p \cdot \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\sigma}}$$

1.2.2 Forma differenziale.

Si ha : $$\frac{D}{Dt} \iiint_{v(t)} \rho \vec{u}\, dv = \iiint_{v_0} \left\{ \frac{D\rho\vec{u}}{Dt} + \rho \vec{u}\, (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right\} dv = \vec{F}_m + \vec{F}_s =$$

$$= \iiint_{v_0} \rho \vec{f}\, dv + \iiint_{v_0} \overline{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} dv$$

$$\iiint_{v_0} [\frac{D\rho\vec{u}}{Dt} + \rho\vec{u}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \rho\vec{f} - \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{T}}]dv = 0$$

Data l'arbitrarietà del volume di controllo v_0 dovrà essere uguale a zero il nucleo dell'integrale.

ma : $$\frac{D\rho\vec{u}}{Dt} + \rho\vec{u}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) = \rho\frac{D\vec{u}}{Dt} + \vec{u}\left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right] = \rho\frac{D\vec{u}}{Dt}$$

il termine dentro la parentesi quadra è nullo per la conservazione della massa .

Quindi infine : $$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{f} + \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{T}}$$

Che scritta per componenti cartesiane risulta :

$$\rho\frac{Du_k}{Dt} = \rho f_k + \frac{\partial}{\partial x_i}T_{ik}$$

Le relazioni scritte per fluidi Newtoniani si ottengono ricordando le relazioni costitutive:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}T_{ik} = -\frac{\partial P}{\partial x_k} + \lambda\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{ii} + 2\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ik}$$

ma : $$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad \frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2}\right)$$

da cui si ottiene l'equazione di Navier-Stokes per fluidi Newtoniani:

$$\rho\frac{Du_k}{Dt} = \rho f_k - \frac{\partial P}{\partial x_k} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2}$$

In forma vettoriale si ha:

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}P + (\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \mu\nabla^2\vec{u}}$$

Se λ e μ sono costanti il fluido si definisce Newtoniano. Per i gas monoatomici ed anche per l'aria : $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ cioè :

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}P + \frac{\mu}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \mu\nabla^2\vec{u}}$$

1.3 Equazione del bilancio dell'energia

L'equazione del bilancio di energia nella sua forma più semplice è conseguenza dell'applicazione del primo principio della termodinamica ad un sistema fluidodinamico in moto. Il primo principio della termodinamica per un sistema afferma :

variazione nel tempo di energia totale	=	aumento di energia per effetto del calore	+	aumento di en. per effetto del lavoro

Cioè dà l'equivalenza tra le variazione di energia, lavoro e il calore, ed esprime il principio che l'energia può cambiare forma ma non crearsi o distruggersi. In questo caso la proprietà estensiva è :

$$E_S = B_s = \iiint_{v_s(t)} \rho e dv$$

con e l'energia totale del sistema per unità di massa , cioè la corrispondente proprietà intensiva ($b = e$ energia totale per unità di massa). La E_s nel seguito rapperesenta la somma delle energie termiche e delle energie cinetiche (ma non l'energia potenziale chimica).
Poiché consideriamo un fluido reale in moto, cioè conduttivo, viscoso, compressibile, il primo principio scritto per un sistema di tempo dà :

$$\frac{DE_S}{Dt} = L + Q$$

dove :
E_S= energia totale termocinetica del sistema

Q = calore ceduto dall'esterno nell'unità di tempo (potenza termica)

L[1]= lavoro compiuto dall'esterno nell'unità di tempo (potenza meccanica)

e la corrispondente proprietà intensiva vale:

$$e = U + \frac{1}{2} u_i^2$$

Con U= energia interna per unità di massa (proprietà intensiva) e $\frac{1}{2} u_i^2$ = energia cinetica per unità di massa (proprietà intensiva).

1.3.1 Forma integrale

Dal teorema del trasporto di Reynolds :

$$\frac{DE_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho e dv + \oiint_{S_0} \rho e \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

[1] Spesso si assume positivo se compiuto dal sistema, nella presente trattazione si assume positivo se compiuto dall'esterno sul sistema.

Esprimiamo ora L in questa maniera :

$$L = L_m + L_s$$
$$L_m = \iiint_{v_0} \rho \vec{f} \cdot \vec{u}\, dv = \iiint_{v_0} \rho f_i u_i dv$$
$$L_s = \oiint_{S_0} \vec{u} \cdot (\overline{\overline{T}} \cdot \vec{n}) dS = \oiint_{S_0} u_i T_{ik} n_k dS$$

Con L_m = lavoro delle forze di massa e L_S = lavoro delle forze di superficie.

Essendo T_{ik} tensore delle tensioni ed analogamente:

$$Q = Q_m + Q_s$$
$$Q_m = \iiint_{v_0} \rho q dv$$
$$Q_s = -\oiint_{S_0} \vec{k} \cdot \vec{n}\, dS = -\oiint_{S_0} k_i n_i dS$$

essendo q il calore prodotto per unità di massa ed il segno meno in Q_S rappresentando l'effetto della normale esterna.

A questo punto si può scrivere :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{v_0} \rho e dv + \iint_{s_0} \rho e \vec{n} \cdot \vec{u} dS = \iiint_{v_0} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dv + \iint_{s_0} \vec{u} \cdot \left(\overline{\overline{T}} \cdot \vec{n}\right) dS + \iiint_{v_0} \rho q dv - \oiint_{s_0} \vec{k} \cdot \vec{n} dS} \quad (3.29)$$

che è la forma integrale dell'equazione dell'energia.
Come vedremo successivamente tale espressione può essere semplificata in modo da consentire delle forme integrabili.

1.3.2 Forma differenziale

Mediante il teorema della divergenza ed accorpando i termini si ha:

$$\frac{DE_s}{Dt} = \iiint_{v_0} \left(\frac{D\rho e}{Dt} + \rho e \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) dv = L + Q = \iiint_{v_0} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dv + \oiint_{S_0} \vec{u} \cdot (\overline{\overline{T}} \cdot \vec{n}) dS +$$
$$+ \iiint_{v_0} \rho q dv - \iint_{s_0} \vec{k} \vec{n} dS$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo ed al quarto termine si ha :

$$\frac{DE_s}{Dt} = \iiint_{v_0} \rho \vec{f} \cdot \vec{u}\, dv + \iiint_{v_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \overline{T})\, dv + \iiint_{v_0} \rho q dv - \iiint_{v_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{k}\, dv$$

cioè :

$$\iiint_{v0} \left\{ \frac{D\rho e}{Dt} + \rho e \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \overline{\overline{T}}) - \rho q + \overline{\nabla} \cdot \vec{k} \right\} dv = 0$$

dato il volume di controllo arbitrario, devono essere nulli gli integrandi, inoltre per i primi due termini si ha per la conservazione della massa :

$$\frac{D\rho e}{Dt} + \rho e \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = e \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{De}{Dt} + \rho e \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \rho \frac{De}{Dt}$$

quindi l'equazione cercata risulta essere la seguente :

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \overline{\overline{T}}) + \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{k}}$$

Se consideriamo la forma differenziale, con il tensore scomposto in coordinate cartesiane, otteniamo:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho f_i \cdot u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_k T_{ik}) + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_k T_{ik}) = T_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k + u_k \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik}$$

con

$T_{ik} = -P\delta_{ik} + \sigma_{ik}$

inoltre :

$$u_k \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} = -u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} T_{ki} = -P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \varepsilon_{ki} \sigma_{ki}$$

Pertanto si ha :

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \frac{u_k^2}{2} =$$

$$= \rho f_i \cdot u_i - P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sigma_{ki} + u_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} - u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i}$$

Come vedremo nel seguito il termine $\varepsilon_{ik}\sigma_{ik}$ [2] tiene conto delle trasformazioni di energia meccanica in termica (per effetto dell'attrito).

1.3.3 Equazione di Bernoulli per flussi stazionari compressibili.

Una forma integrata dell'equazione dell'energia totale può essere ottenuta sotto le seguenti ipotesi:

1) f_i = conservativa: $f_i = -\partial G / \partial x_1$
2) forze viscose non compiono lavoro: $T_{ik} = -P\delta_{ik}$
3) assenza di produzione di calore: $q = 0$
4) assenza di conduzione di calore: $\vec{k} = 0$
5) flusso stazionario

Tale equazione viene indicata generalmente come una delle forme (forma debole) delle equazioni di Bernoulli.

Ricordando che : $T_{ik} \cong -P\delta_{ik}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_k T_{ki}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u_k(-P\delta_{ik})) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i P) =$$
$$= -P\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}$$

Supponendo la f_i conservativa si può introdurre il suo potenziale G

$f_i = -\dfrac{\partial G}{\partial x_i}$ e si ha :

$$\rho u_i\frac{\partial e}{\partial x_i} = -\rho\frac{\partial G}{\partial x_i}u_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_i}P - u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}$$

dividendo per ρ si ha :

$$u_i\frac{\partial e}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{P}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{u_i}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$$

ma gli ultimi due termini danno:

$$u_i\frac{\partial P/\rho}{\partial x_i}$$

[2] $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\sigma_{ki} = \varepsilon_{ik}\sigma_{ki}$

infatti:

$$u_i \frac{\partial P/\rho}{\partial x_i} = \frac{u_i}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{u_i P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

ma dalla conservazione della massa si ha:

$$-\frac{P}{\rho^2} u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{P}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Quindi si ottiene:

$$u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e + G + P/\rho \right) = 0$$

dove H è l'energia totale:

$$H = \left(U + \frac{1}{2}u_i^2 + \frac{P}{\rho} + G \right)$$

Quindi :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})H = 0$$

e :

$$H = U + \frac{1}{2}u_i^2 + \frac{P}{\rho} + G = cost$$

lungo una linea di corrente che ha per tangente u_i. La quantità scalare H non si modifica (ovvero si conserva) lungo il moto, in quanto il vettore u e il gradiente di H devono essere ortogonali, pertanto il flusso è isoenergetico ma non omoenergetico. Si noti che:

$$U + \frac{P}{\rho} = U + Pv = h = entalpia$$

pertanto H è anche detta entalpia totale.

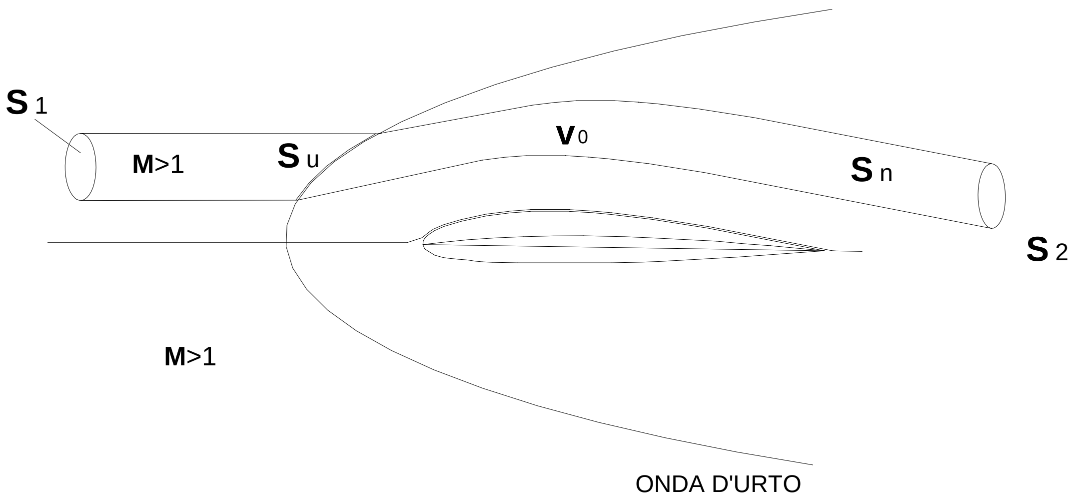
1.3.4 Conservazione dell'energia totale

Abbiamo visto sopra una forma dell'equazione di Bernoulli sotto le condizioni

1) f_i = conservativa
2) forze viscose non compiono lavoro
3) assenza di produzione di calore
4) assenza di conduzione di calore
5) flusso stazionario.

Tali condizioni si possono estendere a flussi non adiabatici e viscosi purché tali effetti siano concentrati in una regione limitata di spessore δ e volume $\delta \cdot S_u$ (discontinuità quali onde d'urto, che chiameremo *adiabatiche*, e strato limite).

Questa è detta forma forte dell'equazione di Bernoulli. In tal caso manteniamo solo le condizioni 1,3 e 5 (non la 2 e la 4) e consideriamo l'equazione in forma integrata su un volume di controllo v_0.



$$A = \iiint_{v_0} \rho \frac{DH}{Dt} dv = \iiint_{v_0} \rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{P}{\rho} + G \right) dv = \iiint_{v_0} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot \left(\overline{u} \cdot \overline{\sigma} \right) + \rho q - \overline{\nabla} \cdot \overline{k} \right) dv = B$$

per le condizioni 3 e 5 il termine B diventa

$$B = \iiint_{v_0} \left(\overline{\nabla} \cdot \left(\overline{u} \cdot \overline{\sigma} \right) - \overline{\nabla} \cdot \overline{k} \right) dv = \oiint_{S_0} \left(\overline{u} \cdot \sigma - \overline{k} \right) \cdot \overline{n} dS$$

per il teorema della divergenza, dove $\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{jj} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}$ e $k_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$

Pertanto se l'effetto è concentrato in uno strato di piccolo spessore δ, σ_{ik} e k_i sono nulli ovunque tranne che nel volume $\delta \cdot S_u$ che non fa parte di S_0 (è interna) e quindi B = 0.

Il termine A sarà, per la conservazione della massa,

$$A = \iiint_{v_0} \rho \frac{DH}{Dt} dv = \iiint_{v_0} \rho \left(\overline{u} \cdot \overline{\nabla} \right) H dv = \iiint_{v_0} \overline{\nabla} \cdot \left(\rho \overline{u} H \right) dv = \oiint_{S_0} \rho \overline{u} H \cdot \overline{n} dS$$

Per il teorema della divergenza $\overline{\nabla} \cdot \left(\rho \overline{u} H \right) = \rho \left(\overline{u} \cdot \overline{\nabla} \right) H + H \overline{\nabla} \cdot \left(\rho \overline{u} \right) = \rho \left(\overline{u} \cdot \overline{\nabla} \right) H$

Quindi $\oiint_{S_0} \rho \overline{u} H \cdot \overline{n} dS = 0$

Ma su S_n si ha $\bar{u} \cdot \bar{n} = 0$ che sono linee di corrente (come un tubo di corrente) e quindi

$$\iint_{S_1} \rho_1 u_1 H_1 dS = \iint_{S_2} \rho_2 u_2 H_2 dS$$

Allora se H_1 è omogeneo in S_1 il campo è **omoenergetico** tranne che nelle discontinuità (S_1 è arbitraria).
Pertanto il risultato è che l'energia totale si conserva in condizioni stazionarie anche attraverso gli urti e le discontinuità purchè ci si trovi in regioni dove l'effetto della viscosità e della conducibilità è trascurabile. La dimostrazione qui riportata non è rigorosa in quanto non considera il salto attraverso la discontinuità, ma tuttavia conduce ad un risultato generalmente valido.

1.3.5 Bilancio di energia meccanica

L'equazione di bilancio dell'energia meccanica si ottiene moltiplichando l'equazione della conservazione della quantità di moto per $\bar{u}$:

$$\rho u_k \frac{D u_k}{Dt} = \rho u_k f_k + u_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}$$

oppure :

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt} \frac{{u_k}^2}{2} = \rho f_k u_k - u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i}}$$

1.3.6 Bilancio di energia termica

Il bilancio di energia termica si ottiene sottraendo l'energia meccanica da quella totale.
Essendo :

$$e = U + \frac{1}{2} u_k^2$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \frac{{u_k}^2}{2}$$

si ottiene

$$\rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \frac{{u_k}^2}{2} = \rho f_i \cdot u_i - P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sigma_{ki} + u_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i}$$

$$- \rho \frac{D}{Dt} \frac{{u_k}^2}{2} = - \rho f_k u_k - u_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}$$

1.3.6.1 L'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di energia interna

$$\boxed{\rho\frac{DU}{Dt} = -P\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\cdot\sigma_{ki} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i}}$$

od anche : $\rho\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}T_{ik} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i}$

in forma generale:

$$\rho\frac{DU}{Dt} = -P\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})\cdot\vec{\sigma} + \rho q - \vec{\nabla}\cdot\vec{k} = -P\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \mu\varphi^2 + \rho q - \vec{\nabla}\cdot\vec{k}$$

Si noti che $-\mathrm{P}\overline{\nabla}\cdot\overline{\mathrm{u}}$ è il lavoro reversibile compiuto dalla pressione.Definiamo $\mu\varphi^2$ come la velocità di dissipazione dell'energia cineticae sua trasformazione irreversibile in energia interna:

$$\mu\varphi^2 = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\sigma_{ik} = (\Omega_{ik} + \varepsilon_{ik})\sigma_{ik} = \varepsilon_{ik}\sigma_{ik}$$

in quanto Ω_{ik} è emisimmetrica e σ_{ik} è simmetrica $\Omega_{ik}\ \sigma_{ik} = 0$.
Tenendo conto delle relazioni costitutive $\sigma_{ik} = \lambda\varepsilon_{jj}\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik}$ si ottiene::

$$\mu\varphi^2 = \varepsilon_{ik}(\lambda\varepsilon_{jj}\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik})$$

1.3.6.2 L'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di temperatura

Ricordando le relazioni costitutive e le definizioni di calore specifico a volume costante:

$$dU = c_v\,dT\,,\ c_v = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_v;\ \ k_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i}\ ;$$

si ottiene:

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt} = -P\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \mu\varphi^2 + \rho q + k\nabla^2 T$$

1.3.6.3 L'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di entalpia

Se introduciamo l'entalpia:

$$h = U + P\,v$$

che è l'energia associata al moto molecolare intorno al baricentro della particella di fluido
Si ottiene l'equazione dell'energia in termini di entalpia:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu\varphi^2 + \rho q + k\nabla^2 T$$

E dalla $dh = c_p\, dT \;\Rightarrow\; \rho \dfrac{Dh}{Dt} = \rho c_p \dfrac{DT}{Dt}$ si ha

$$\boxed{\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu\varphi^2 + \rho q + k\nabla^2 T}$$

1.3.6.4 L'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di entropia

Ricordiamo la definizione di S ed il secondo principio della termodinamica

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev}$$

$$\delta Q = dU + Pdv$$

$$dU = TdS - Pdv = TdS + \frac{P}{\rho^2}d\rho$$

Sostituendo tali espressioni nelle equazioni precedenti si ottiene:

$$\rho T\frac{DS}{Dt} + \frac{P}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -P\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \mu\varphi^2 + \rho q - \vec{\nabla}\cdot\vec{k}$$

ma $\dfrac{P}{\rho}\dfrac{D\rho}{Dt} = -P\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ per la conservazione della massa; pertanto si semplifica con il primo termine a destra

$$\boxed{\rho T\frac{DS}{Dt} = \mu\varphi^2 + \rho q - \vec{\nabla}\cdot\vec{k}}$$

1.3.6.5 Disequazione di Clausius-Duhén e produzione di entropia

Si può dimostrare come il termine $\mu\varphi^2$ è definito positivo, infatti:

$$\mu\varphi^2 = \varepsilon_{ik}\left\{\lambda\varepsilon_{jj}\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik}\right\} = \lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + 2\mu\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik}$$

e ricordando che $\lambda' = \lambda + \dfrac{2}{3}\mu$

$$\mu\varphi^2 = (\lambda' - \frac{2}{3}\mu)\varepsilon_{jj}^{\ 2} + 2\mu\varepsilon_{ik}^{\ 2} = \lambda'\varepsilon_{jj}^{\ 2} + 2\mu\left\{\varepsilon_{ik}^{\ 2} - \frac{1}{3}\varepsilon_{jj}^{\ 2}\right\} =$$

$$= \lambda'\varepsilon_{jj}^{\ 2} + 2\mu\left\{\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{jj}\delta_{ik}\right\}\left\{\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{jj}\delta_{ik}\right\} = \lambda'\varepsilon_{jj}^{\ 2} + 2\mu\left\{\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{jj}\delta_{ik}\right\}^2$$

Per cui, poichè λ' e μ sono positivi, si ha $\mu\varphi^2 \geq 0$, valendo il segno uguale o per λ' = μ = 0 (fluido ideale) o per fluidi reali se ε_{ik} = 0 (situazione fluidostatica).

Inoltre anche il termine $-\dfrac{1}{T}\vec{\nabla}\cdot\vec{k}$ contiene un elemento definito positivo:

$$-\frac{1}{T}\vec{\nabla}\cdot\vec{k} = k\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2 + k\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)$$

$$\rho\frac{DS}{Dt} = \frac{\mu\varphi^2}{T} + \frac{\rho q}{T} - \frac{1}{T}\vec{\nabla}\cdot\vec{k} =$$

$$= \frac{1}{T}[\lambda'\varepsilon_{jj}^{\ 2} + 2\mu(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{jj}\delta_{ik})^2] + k\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\rho q}{T} + k\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)$$

Si noti che i primi due termini a destra definiti positivi tengono in conto dell'energia meccanica dissipata (produzione di calore irreversibile); il terzo termine definito positivo, tiene conto della degradazione dell'energia termica nel processo di diffusione del calore. Gli ultimi due termini avranno segni dipendenti dalle condizioni; tuttavia per condizioni adiabatiche nelle quali gli ultimi due termini sono nulli si ha la disuguaglianza di **Clausius-Duhén**. Infatti integrando su un volume di controllo avente frontiera adiabatiche si ottiene:

$$\iiint_{v_0}\rho\frac{DS}{Dt}dv = \iiint_{v_0}\left\{\frac{\mu\varphi^2}{T} + k\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2\right\}dv + \iiint_{v_0}k\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)dv =$$

$$= \iiint_{v_0}\left\{\frac{\mu\varphi^2}{T} + k\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2\right\}dv + \iint_{S_0}k\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}n_i dS$$

ma l'ultimo termine nella precedente è uguale a zero perchè $\left.\frac{\partial T}{\partial n_i}\right|_{S_0} = 0$ per l'adiabaticità.

Pertanto, restano nell'integrale i due termini definiti positivi già visti.

$$\iiint_{v0}\rho\frac{DS}{Dt}dv = \iiint_{v0}[\frac{\mu\varphi^2}{T} + k(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i})^2]dv \geq 0$$

Il segno uguale vale solo per flussi non viscosi e non conduttivi, ciò corrisponde ad una trasformazione reversibile.
Si noti che per moti stazionari di flussi non conduttivi e non viscosi ($k = \mu = \lambda' = 0$) :

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}S = 0$$

si conserva cioè l'entropia lungo le linee di corrente. Pertanto un eventuale gradiente di entropia , se presente , deve essere normale alle linee di corrente per k, μ e λ' trascurabili . Ciò è vero indipendentemente dalla storia subita dal fluido nel suo moto a monte. Pertanto il flusso può essere isoentropico ma il campo può non essere omoentropico.

$$\vec{\nabla}S \neq 0 \quad ; \quad \vec{u}\perp\vec{\nabla}S \Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{\nabla}S = 0$$

Nelle condizioni isoentropiche valgono le seguenti:

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = \cos t \quad ; \quad \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \cos t \quad ; \quad \frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \cos t$$

che quindi possono sostituire l'equazione dell'energia (equazione differenziale) legando mediante un'equazione algebrica le proprietà termodinamiche.

1.4 Altre forme delle equazioni di Navier-Stokes

1.4.1 Accelerazione di Lagrange

Cerchiamo un'altra forma della derivata sostanziale della velocità che viene detta accelerazione di Lagrange. Per la componente 1 possiamo scrivere:

$$\frac{Du_1}{Dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) +$$

$$+ u_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u_k^2}{2} - u_2 \omega_3 + u_3 \omega_2$$

allora generalizzando :

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{u_k^2}{2} + (\vec{\omega} \times \vec{u})_i$$

ovvero :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{u_k^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

1.4.2 Eq. di trasporto della vorticità per flussi incompressibili.

Avendo definito la vorticità ω, $\left(\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u}\right)$ l'equazione del trasporto della vorticità (o equazione di conservazione del momento della quantità di moto) può essere ottenuta da quelle delle quantità di moto applicando il rotore, ovvero:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \vec{\nabla} \times \left(\rho \cdot \vec{f} \right) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla} \times \left(\nabla^2 u \right)$$

$$\rho \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \rho \vec{\nabla} \times \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{\omega} + \rho \left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}$$

Le forze di massa sono generalmente conservative : $\vec{f} = -\vec{\nabla} G$

applicando il rotore :

$$\rho \vec{\nabla} \times \vec{f} = \rho \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} G \equiv 0$$

Il trasporto della vorticità risulta:

$$\boxed{\rho \cdot (\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})) = \mu \nabla^2 \omega}$$

Analogo risultato si può ottenere a partire dall'accelerazione di Lagrange
Applicando il rotore all'accelerazione di Lagrange si ha infatti:

$$\vec{\nabla} \times \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega})$$

oppure : $\vec{\nabla} \times \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})$

Che dà luogo ad una formula compatta :

$$\boxed{\rho \cdot (\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})) = \mu \nabla^2 \omega}$$

O, sviluppando il prodotto vettoriale:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \mu \nabla^2 \vec{\omega} + \rho(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}}$$

Si noti che il termine $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \left[\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{\omega}\right]$ è la derivata sostanziale della vorticità, mentre il termine $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{u}$ tiene conto dell'allungamento ed accorciamento dei vortici e dà un effetto analogo a quello del regolatore di Watt o di una ballerina che allarghi o stringa le braccia al corpo.
Infatti :

- il vortice si allunga, ω cresce.
- il vortice si accorcia , ω diminuisce.

Esempio di vortice che si allunga è il gorgo prodotto nel fondo di un lavandino in corrispondenza dello scarico.
Si noti infine che nell'equazione della vorticità non compare esplicitamente la pressione, il che fisicamente corrisponde alla circostanza che il momento prodotto dalle pressioni è nullo.

E' interessante notare che nel caso incompressibile è possibile introdurre il potenziale vettore. Tenendo conto delle seguenti relazioni:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \;;\quad \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = -\nabla^2 \psi + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi})$$

È possibile ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \rho\left\{\dfrac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\times\vec{\psi}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{\omega}\right\}=\mu\nabla^2\vec{\omega}+\rho\left(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{\psi}\right) \\ \\ \nabla^2\vec{\psi}=-\vec{\omega}+\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\psi}\right) \end{cases}$$

Sostituendo la seconda delle equazioni del sistema nella prima, si può ottenere una singola equazione differenziale di IV ordine in $\vec{\psi}$ (potenziale vettore).

L'uso delle variabili vorticità-potenziale vettore può essere comodo nelle simulazioni numeriche dei flussi incompresibili.

E' interessante notare che nel caso bidimensionale, il sistema si semplifica. Tenendo conto che in 2D $\vec{\omega}=\left(0,0,\omega\right)$, $\vec{\psi}=\left(0,0,\psi\right)$, si ha:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{D\omega}{Dt}=\mu\nabla^2\omega \\ \\ \nabla^2\psi=-\omega \end{cases}$$

Da completare con le condizioni al contorno, che devono dare fisicamente l'impermeabilità, il non scorrimento alle pareti o le condizioni di flusso assegnate. Il sistema è ancora del IV ordine, la ψ è la funzione di corrente.

1.5 Altre forme dell'equazione di Bernoulli

1.5.1 Equazione di Bernoulli per flussi incompressibili e rotazionali.

Si consideri l'equazione della quantità di moto di Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} P + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} P + \vec{F}(\lambda, \mu)$$

gli ultimi due termini (viscosi) li poniamo come una F(λ,μ) e rappresentano forze non conservative, mentre la $\vec{f}$ è conservativa

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} G$$

essendo *G* il potenziale gravitazionale. Le forze di pressione sono conservative in quanto, per la costanza di ρ, $\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)$. Si sostituisca $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ espressa secondo Lagrange :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \frac{u^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{u} \right\} = -\rho \vec{\nabla} G - \vec{\nabla} P + \vec{F}(\lambda, \mu)$$

Per flussi incompressibili :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + G + \frac{P}{\rho} \right) = -\vec{\omega} \times \vec{u} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{F(\mu, \lambda)}{\rho}$$

Se si trascurano gli effetti delle viscosità *F(μ,λ)=0*, e il flusso è stazionario:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + G + \frac{P}{\rho} \right) = -\vec{\omega} \times \vec{u}$$

Pertanto la quantità :

$$H_m = \frac{u^2}{2} + G + \frac{P}{\rho}$$

si conserva sia lungo le linee tangenti ad $\vec{\omega}$ sia lungo le linee tangenti ad $\vec{u}$ nel caso rotazionale per flussi stazionari , incompressibili con effetti della viscosità trascurabili. Cioè H_m si conserva sia lungo le linee di corrente che lungo le linee di vorticità e quindi anche lungo il moto.

1.5.2 Bernoulli per flussi barotropici-stazionari

Si dice barotropico un flusso per cui $\rho=\rho(P)$ cioè la densità non dipende dalla temperatura. Questa ipotesi è accettabile per bassi valori subsonici (con piccole variazioni di temperatura).

In tal caso le forze di pressione sono ancora conservative : $\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \vec{\nabla}\int \frac{dP}{\rho(P)}$

Infatti se definiamo : $F(P) = \int \frac{dP}{\rho(P)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{dF}{dP}\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S}$$

Dove la formula è la proiezione del gradiente sull'ascissa curvilinea S.
Con questa ipotesi risulta :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + G + \int \frac{dP}{\rho}\right) = -\vec{\omega} \times \vec{u}$$

E vale ancora quanto detto al paragrafo precedente..

1.5.3 Bernoulli per flussi potenziali-non stazionari

Come già accennato se $\vec{\omega} = 0$ in tutto il campo : $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$
dove φ è il potenziale scalare nel sistema di riferimento corpo (SRC). In tale caso :

$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + G + \int \frac{dP}{\rho}\right) = -\vec{\omega} \times \vec{u} + \frac{F(\lambda,\mu)}{\rho} = 0$ dove gli ultimi due termini sono nulli per le condizioni di irrotazionalità e di effetto della viscosità trascurabile. Questo porta alla :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi}{2} + G + \int \frac{dP}{\rho} = c(t)$$

dove *c(t)* è una costante nello spazio e funzione solo del tempo , cioè ad un dato istante assume lo stesso valore in tutto il campo . Questo vale nel sistema di riferimento corpo (SRC): se ad esempio il profilo oscilla nel sistema di riferimento associato al profilo l'aria distante oscilla ed il profilo sta fermo, quindi la *c(t)* tiene conto di questo effetto.

1.6 Teorema di Crocco

Consideriamo il I ed il II principio della termodinamica per un sistema termodinamico.

$\delta Q = dU + Pdv$; $h=U+Pv$

$dh=dU+Pdv+vdP$; $\delta Q=dh-vdP$; $dh = \delta Q$

ma : $\frac{\delta Q}{T} = dS \Rightarrow \delta Q = TdS$

quindi :

$$dh = TdS + \frac{dP}{\rho}$$

Per un fluido in moto stazionario , considerando S ed h come variabili intensive (cioè entropia ed entalpia per unità di massa) e trascurando gli effetti delle viscosità ed a combustione assente, i differenziali totali d possono essere sostituiti dai gradienti; infatti :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot dx_i = \nabla h \cdot d\bar{x}$$

e si ottiene l'equazione di Gibbs nella rappresentazione entalpica:

$$T\vec{\nabla}S = \vec{\nabla}h - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \Rightarrow \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \vec{\nabla}h - T\vec{\nabla}S$$

che consta di una parte conservativa con potenziale entalpia specifica h ed una non conservativa (è conservativo solo per flussi isotermi $T\nabla S = \nabla(TS)$). Si ottiene quindi:

$$\vec{\nabla}\left(h + \frac{u^2}{2} + G\right) = -\vec{\omega} \times \vec{u} + T\vec{\nabla}S$$

che proiettata sulle linee di corrente diventa :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(h + \frac{u^2}{2} + G\right) = 0 \quad ;$$

Si definisce :

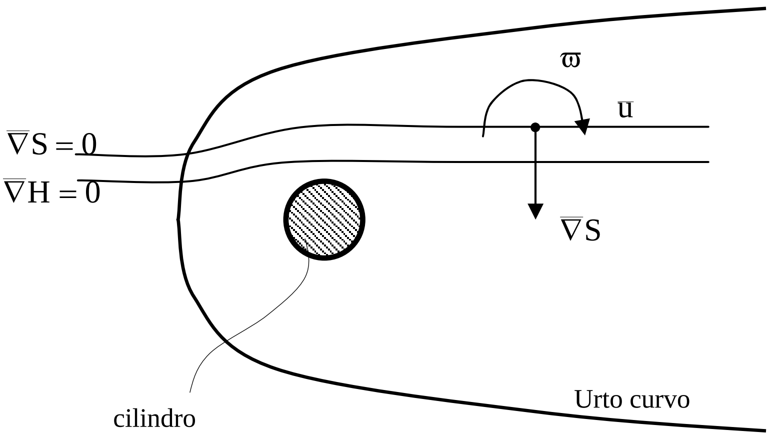
$$H' = h + \frac{u^2}{2} + G = \cos t$$

Se le linee di corrente si estendono fino all'infinito dove il flusso è uniforme , $H' = \cos t$ in tutto il campo. Essendo $\nabla H' = 0$ il teorema di Crocco afferma che:

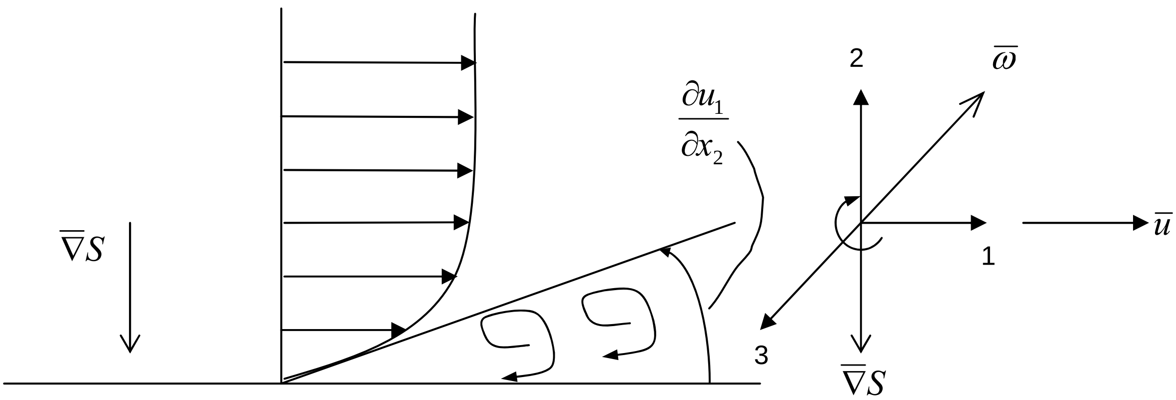
$$-\vec{\varpi}\times\vec{u}+T\vec{\nabla}S=0$$

che stabilisce per un flusso stazionario che l'entropia è costante in tutto il campo solo se $\vec{\varpi}=0$ o $\vec{\varpi}$ è parallelo ad $\vec{u}$. Se il flusso è rotazionale il $\vec{\nabla}S$ è normale ad $\vec{\varpi}$ e $\vec{u}$. Inoltre se il campo è omoenergetico, ma non omoentropico, sarà presente una vorticità ϖ (vedi figure).

Esempio: onde d'urto



Esempio: Strato Limite



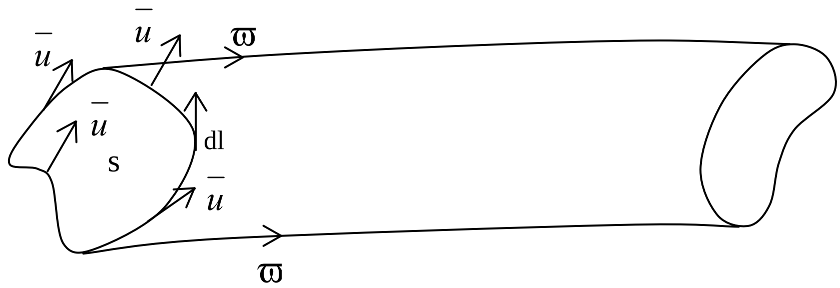
Infatti $\mu\phi^2 \propto \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2$ cioè al quadrato delle pendenze che sono massime sulla parete.

1.7 Teoremi sui vortici

Chiamiamo *regione vorticosa* il campo di flusso nel quale sia diversa da zero la vorticità : $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$. In tale regione le particelle sono animate da una velocità angolare : $\vec{\varsigma} = \dfrac{\vec{\omega}}{2}$

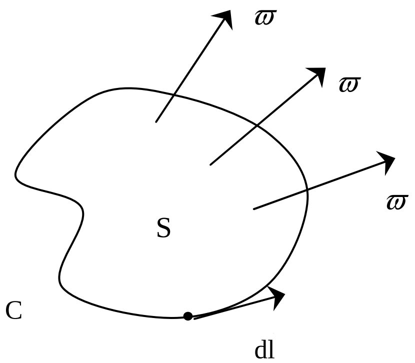
In analogia alle linee di corrente (che hanno per tangente in ogni punto il vettore velocità) possiamo definire le linee vorticose come quelle che hanno per tangente in ogni punto il vettore vorticità .

Chiamiamo quindi *vortice* o *tubo vorticoso* lo spazio delimitato dalle linee vorticose passanti per una linea materiale chiusa ; se la dimensione della linea è infinitesima il vortice si definisce *filetto vorticoso* .



Tubo vorticoso o vortice

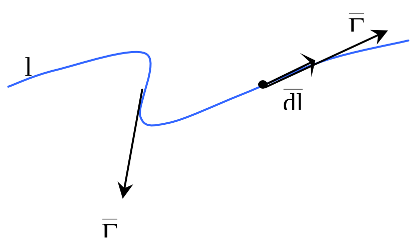
Si definisce intensità di un vortice di data sezione S il flusso di $\vec{\omega}$ attraverso di essa :



$$\Gamma = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

che per domini semplicemente connessi è quindi uguale alla circolazione di $\vec{u}$ per il teorema di Stokes .

Nel caso di filetto vorticoso la Γ può assumere un significato vettoriale in quanto sarà allineata in ogni punto della linea con la tangente alla linea stessa.



1
.
7

1.7.1 Teorema di Kelvin-Thompson

"La circolazione lungo un circuito chiuso , costituito sempre dalle stesse particelle è invariabile nel tempo se: il fluido è a viscosità trascurabile , le forze di massa sono conservative e il flusso è barotropico "

cioè : $\dfrac{D\Gamma}{Dt} = 0$

Ciò indica che la circolazione si conserva nel moto per flussi incompressibili (o barotropici) a viscosità trascurabile .

Conseguenza di ciò è che se $\vec{\omega} = 0$ all'infinito a monte anche $\Gamma=0$ all'infinito a monte (per t=0) e sia Γ che ω si mantengono nulli per qualunque tempo t >0.

Quindi $\vec{\omega} = 0$ in tutti i punti a valle tranne :

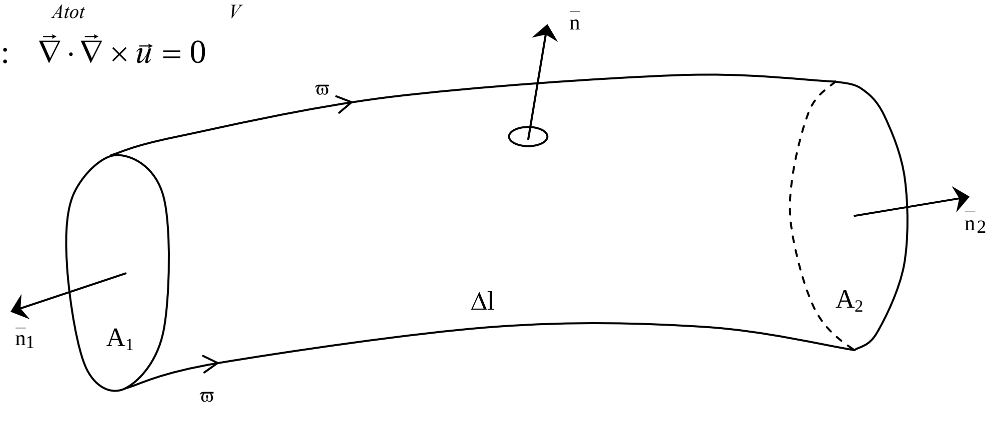
- i flussi per i quali $\vec{f} \neq -\vec{\nabla} G$ (forze di massa non conservative, convezione naturale, flussi termotropici)
- per μ e λ elevati (onde d'urto, strati limite, scie laminari o turbolente),
- $\rho=\rho(P,T)$ flussi altamente compressibili,
- in domini molteplicemente connessi (per i quali non vale il teorema di Stokes).

1.7.2 Primo teorema di Helmholtz sui vortici

"L'intensità di un vortice (tubo vorticoso) è invariabile lungo di esso".

Si noti che : $\oiint_{Atot} \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}\, dV = 0$

In quanto : $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$



Pertanto : $\iint_{A1} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint_{A2} \vec{\omega}_2 \cdot \vec{n}_2\, dS + \iint_{Al} \vec{\omega}_l \cdot \vec{n}_l\, dS = 0$

Ma : $\iint_{Al} \vec{\omega}_l \cdot \vec{n}_l\, dS = 0$ per definizione di tubo vorticoso ($\vec{\omega}_l \perp \vec{n}_l$)

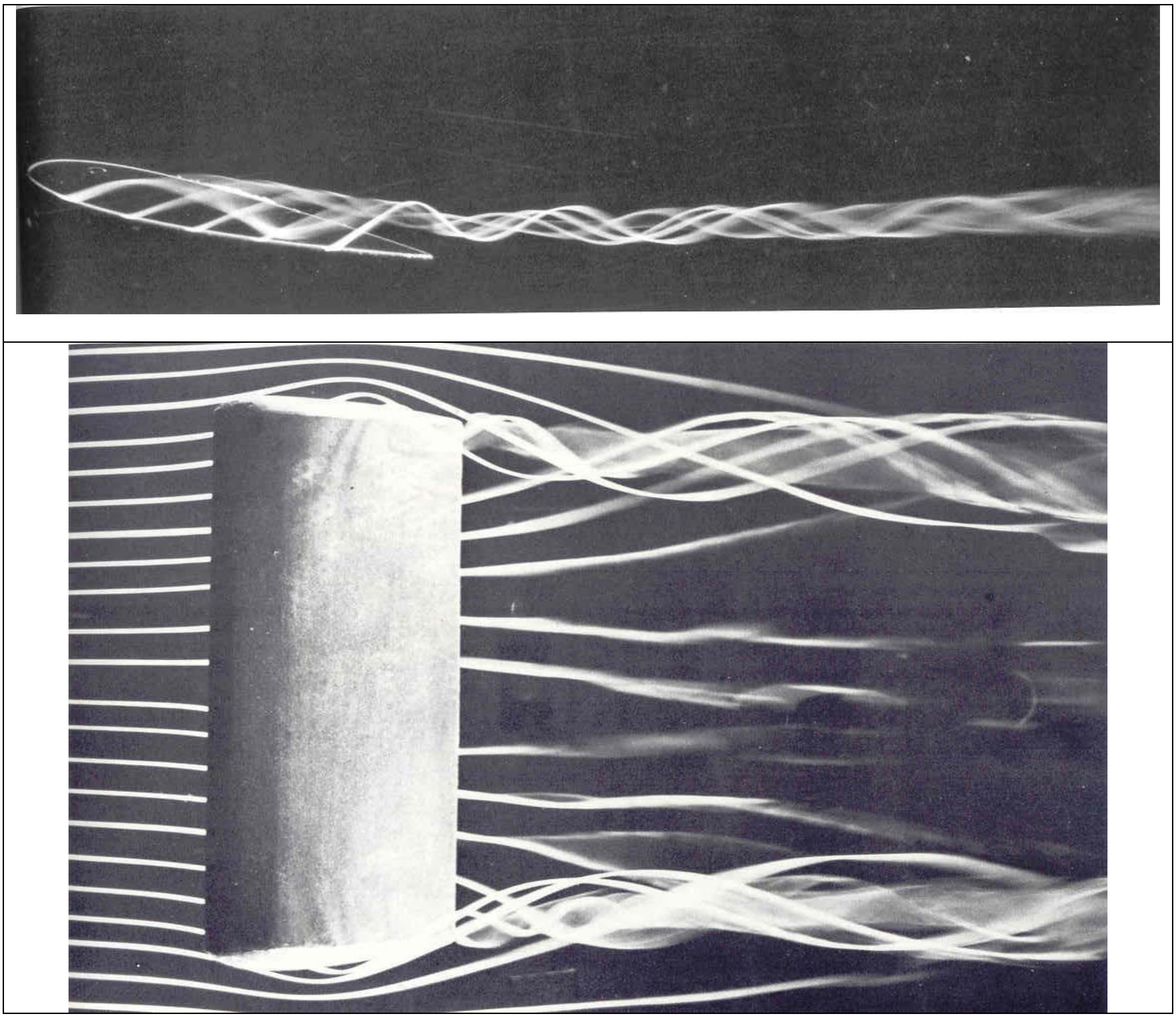
Allora :

$$\iint_{A1} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint_{A2} \vec{\omega}_2 \cdot \vec{n}_2\, dS = 0$$

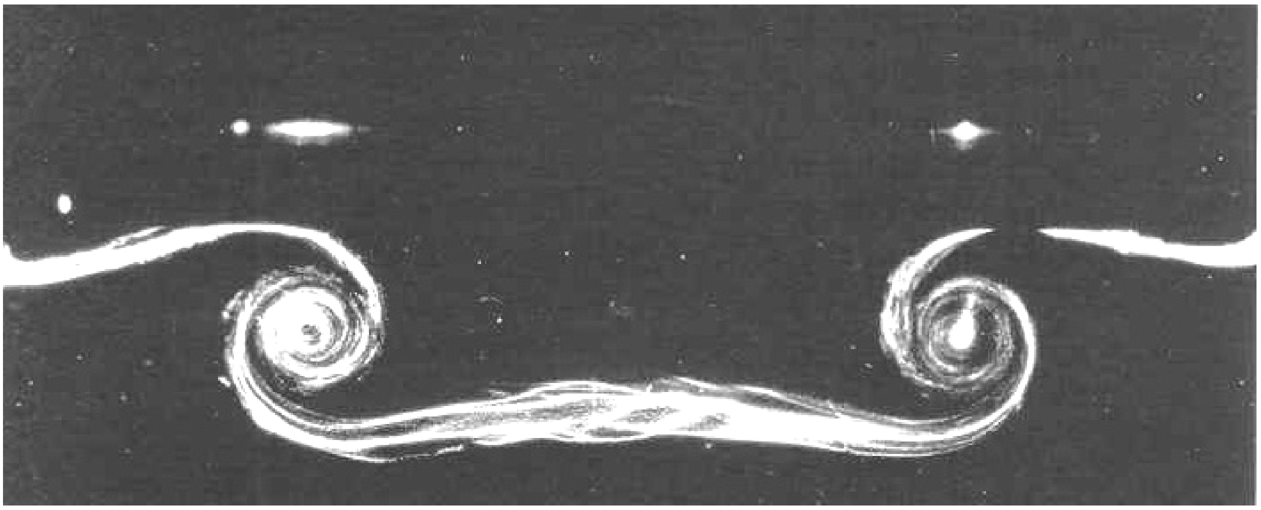
$$\Rightarrow \Gamma_1 = \iint_{A_1} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{n}_1\, dS = -\iint_{A2} \vec{\omega}_2 \cdot \vec{n}_2\, dS = \iint_{A2} \vec{\omega}_2 \cdot (-\vec{n}_2)\, dS = \Gamma_2$$

Questo teorema ha notevoli conseguenze pratiche in fluidodinamica applicata e problemi d'ingegneria meccanica, aeronautica o di geofisica.
Consegue infatti che un vortice non può avere inizio o fine nel fluido , può quindi :

- iniziare o terminare ai confini del fluido (ad esempio contro una parete o sulle superficie libere come avviene ad esempio per i cicloni tropicali che iniziano al suolo, e terminano al limite della troposfera, altri esempi sono i vortici a valle di ostacoli quali traverse e pilastri di ponti).
- essere infinito (ad esempio i vortici rilasciati dalle ali degli aeroplani teoricamente si prolungano da un aeroporto all'altro)
- essere chiuso su se stesso a forma di toro (vortice ad anello ad esempio si pensi agli anelli di fumo).



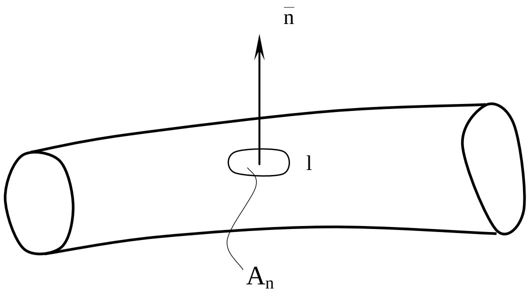
Vista laterale e vista dall'alto dei vortici di coda dal bordo di un'ala rettangolare. L'ala ha un profilo NACA 0012 e un aspect ratio di 4. A questo numero di Reynolds (Re=10000) la scia è laminare.



Sezione di una scia vorticosa dietro un’ala rettangolare.
Il numero di Reynolds basato sulla corda è di Re=100000.

1.7.3 Secondo teorema di Helmholtz sui vortici

“Le particelle di fluido che ad un dato istante appartengono ad un vortice restano sempre all’interno dello stesso”.



Prendiamo un circuito materiale *l* sulla superficie di un tubo vorticoso, per il teorema di Lord Kelvin : $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$

ma la definizione di Γ dà: $\Gamma = \oint_l \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_{Al} \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dA$ per il teorema di Stokes.

$\Gamma = \iint_{Al} \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dA = 0$ in quanto sulla superficie del tubo $\vec{\omega} \perp \vec{n}$.

Quindi : $\Gamma = \cos t = 0$ sulla A_l

Se una particella vorticosa uscisse attraverso *Al* ,ciò sarebbe contrario a quanto scritto perché nel momento dell’attraversamento si avrebbe $\frac{D\Gamma}{Dt} \neq 0$ in quanto la particella uscente sarebbe dotata di vorticità diversa da zero che trasporterebbe con sè.

Inoltre una particella vorticosa si avvicinerebbe ad A_l con velocità $\vec{u}_p \neq \vec{u}_l$, ma quando si trova esattamente sulla A_l la $\vec{u}_p = \vec{u}_l$ per definizione di circuito materiale e di superficie vorticosa. Quindi il tubo vorticoso si deforma con la velocità delle particelle, che pertanto non possono uscire.

Si noti che la velocità della superficie vorticosa in generale ha direzione diversa da ϖ. Non è detto che $\vec{\omega} \perp \vec{u}$ in quanto la $\vec{u}$ può esser dovuta anche a flussi potenziali cioè :

$$\vec{u} = \vec{u}_{vor} + \vec{u}_{Pot} = \vec{u}_{\mathrm{v}} + \vec{\nabla}\phi$$

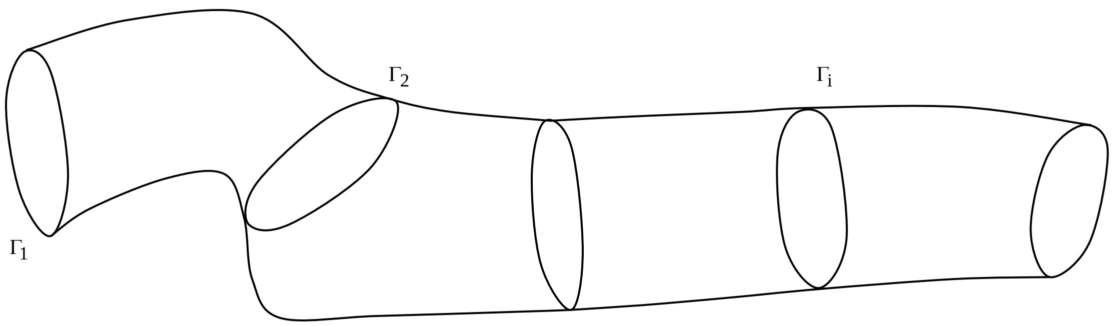
ma:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}_{\mathrm{v}} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla} \times \vec{u}_{\mathrm{v}}$$

Pertanto $\vec{\omega}$ e $\vec{u}$ possono essere anche allineati in rari casi quali ad esempio in mulinello di scarico di una vasca $\vec{\omega}$ è verticale e $\vec{u}$ sull'asse anche, mentre fuori dell'asse il moto del fluido sarà a spirale.

1.7.4 Terzo teorema di Helmholtz sui vortici

"L'intensità di un vortice è invariabile nel tempo".



Poiché l'intensità di un vortice coincide con la circolazione lungo un circuito che lo abbracci, presi diversi circuiti Γ_i , si avrà:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \ldots\ldots = \Gamma_i$$

per i precedenti teoremi di Helmholtz, e

$$\frac{D\Gamma_i}{Dt} = 0$$

per il teorema di Kelvin, il chè dimostra il teorema.