

# Capitolo 10

## Strato limite

Le condizioni di flusso a  $Re \rightarrow \infty$  sono tali per cui è possibile in molti problemi applicativi separare lo studio del campo di velocità complessivo nel modo seguente:

1. Flusso esterno potenziale
2. Flusso interno viscoso

Come si vedrà lo studio del problema 'flusso interno' è fortemente semplificato grazie alla teoria dello strato limite, nel caso in cui non si abbiano distacchi o ricircolazioni quali si verificano ad esempio in presenza di stallo o di corpi tozzi.

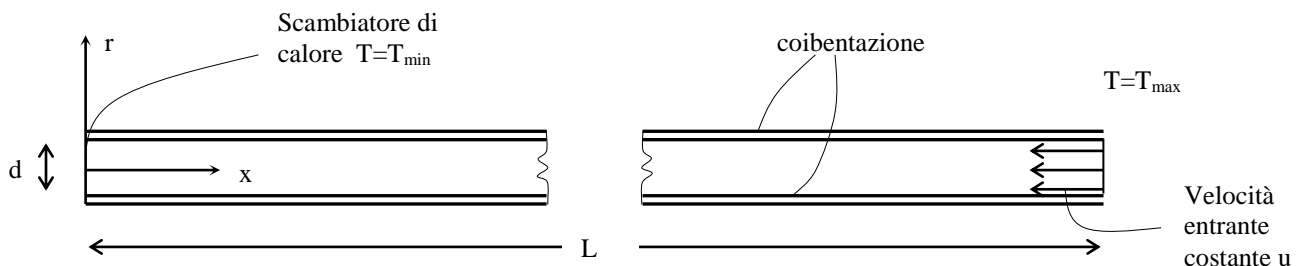
In presenza di strato limite la soluzione esterna può in prima approssimazione essere condotta separatamente dalla soluzione interna mentre quest'ultima dipende in modo rilevante dalle soluzioni esterne .

Per capire il significato matematico del processo di limite per  $Re$  che tende all'infinito, nelle equazioni di governo dei campi fluidodinamici si usa il metodo della perturbazione singolare.

Per ridurre la complessità matematica mantenendo gli aspetti concettuali dei principi fondamentali della teoria dello strato limite si considera, a titolo di esempio, l'equazione di conservazione dell'energia termica in condizione stazionaria, in presenza di conduzione, convezione, e sorgenti volumetriche di calore .

### 10.1 Strato limite termico in situazione di flusso incompressibile, stazionario, monodimensionale (*leggere*)

Consideriamo il problema fisico di un tubo di lunghezza  $L \gg d$  (diametro), ad esempio  $L=1000m$ ,  $d=0.2m$ .

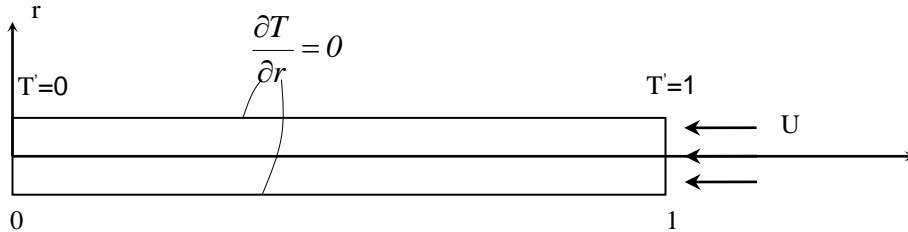


Se le pareti sono adiabatiche, possiamo ipotizzare che valga un modello monodimensionale (1D):

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \quad o \quad \frac{\partial}{\partial r} = 0 \quad e \quad \frac{dA}{dx} = 0$$

$$u_2 = u_3 = 0 \quad o \quad u_r = 0$$

cioè l'area della sezione non varia.



L'equazione dell'energia termica in termini di temperatura (3.51) sotto le ipotesi dette e per  $Ec \ll 1$  ed ipotizzando si tratti di un liquido ( $c_v = c$ ), si riduce a :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \rho q \quad (10.1)$$

Si consideri il caso stazionario  $\left( \frac{\partial T}{\partial t} = 0; St \rightarrow \infty \right)$ :

quindi :

$$\rho c_p \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = k \nabla^2 T + \rho q \quad (10.2)$$

che nel caso monodimensionale si riduce a:

$$-\rho c_p u \frac{dT}{dx} - k \frac{d^2 T}{dx^2} = \rho q$$

cioè rendendola in forma adimensionale :

$$\frac{dT'}{dx'} + \frac{k}{\rho c_p u L} \frac{d^2 T'}{dx'^2} = -\frac{qL}{c_p u T} \quad \text{avendo usato} \quad T' = \frac{T - T_{min}}{T_{max} - T_{min}} = \frac{T - T_{min}}{\Delta T}; \quad x' = \frac{x}{L}$$

Definendo il numero di Peclet ( $Pe$ ), come:

$$Pe = Pr \times Re = \frac{c_p \mu}{k} \frac{uL\rho}{\mu} \quad (10.3)$$

e come secondo numero adimensionale:

$$q' = \frac{qL}{c_p u T} \quad (10.4)$$

si ottiene (togliendo gli apici per semplificare la notazione):

$$L(T) = \frac{dT}{dx} + \frac{1}{Pe} \frac{d^2T}{dx^2} = -q \quad (10.5)$$

avendo definito l'operatore differenziale  $L(T) = \frac{d}{dx} + \frac{1}{Pe} \frac{d^2}{dx^2}$

con le condizioni al contorno :

$$\begin{cases} x = 0, T = 0 \\ x = 1, T = 1 \end{cases} \quad (10.6)$$

Si possono ottenere due formulazioni asintotiche, la prima per  $Pe \rightarrow 0$  ( $Re \rightarrow 0$ )<sup>1</sup>, e la seconda per  $Pe \rightarrow \infty$  ( $Re \rightarrow \infty$ ). Come già detto, la teoria dello strato limite si introduce per  $Re \rightarrow \infty$ . Si ha cioè:

$$\lim_{Pe \rightarrow \infty} L(T) = \frac{dT}{dx} = -q \quad (10.9)$$

che dà la soluzione:

$$T(x) = -qx + \text{cost} = (1+q) - qx \quad (10.10)$$

avendo imposto le condizioni al contorno (10.6.b)

Si noti che questa soluzione dà per i valori al contorno  $\begin{cases} x = 0 \rightarrow T = 1+q \\ x = 1 \rightarrow T = 1 \end{cases}$  e pertanto

la (10.6) per  $x=0$  non è rispettata, il che dimostra la necessità di studiare la soluzione per  $x=0$  in maggiore dettaglio.

Cerchiamo ora, quale riferimento, la **soluzione generale analitica** per  $Pe$  qualunque.

Cerchiamo prima la soluzione generale dell'omogenea associata:

$$\begin{aligned} T_g(x) &= e^{\lambda x} \\ \Rightarrow \lambda e^{\lambda x} + \frac{1}{Pe} \lambda^2 e^{\lambda x} &= 0 \end{aligned}$$

cioè  $\lambda=0$ ,  $\lambda=-Pe$

$$T_g(x) = C_1 + C_2 e^{-Pe x} \quad (10.11)$$

Cerchiamo quindi la soluzione particolare:

$$T_p(x) = -q x \quad (10.12)$$

<sup>1</sup> La formulazione asintotica per  $Pe \rightarrow 0$  ( $Re \rightarrow 0$ ) dà:

$$\lim_{Pe \rightarrow 0} L(T) = \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (10.7)$$

avente come soluzione asintotica:

$$T(x)=x \quad (10.8)$$

Definiamo i valori delle costanti sulla base delle condizioni al contorno (10.6):

$$\begin{cases} T(x) = C_1 + C_2 e^{-\lambda Pe} - qx \\ x = 0, T = 0 \\ x = 1, T = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 e^{-Pe} - q = 1 \\ C_2 \left(1 - \frac{1}{e^{Pe}}\right) + q = 1 \end{cases}$$

Così :

$$C_2 = -\frac{(1+q)}{(1-e^{-Pe})} \quad C_1 = \frac{1+q}{(1-e^{-Pe})} ,$$

La soluzione della (10.5) con le condizioni al contorno (10.6), sarà :

$$T(x) = \frac{(1+q)}{(1-e^{-Pe})} (1 - e^{-xPe}) - qx \quad (10.13)$$

Verifichiamo che il valore asintotico della soluzione generale (10.13) uguagli le soluzioni delle formulazioni asintotiche<sup>2</sup>. Per quanto riguarda il  $\lim_{Pe \rightarrow \infty}$ , si ha:

$$\lim_{Pe \rightarrow \infty} T(x) = (1+q) - qx \quad (10.14)$$

---

<sup>2</sup> Per  $Pe \rightarrow 0$  (soluzione diffusiva o conduttiva) si ottiene (applicando l'Hopital per la forma indeterminata):  $\lim_{Pe \rightarrow 0} T(x) = (1+q)x - qx = x$  che uguaglia la (10.8)

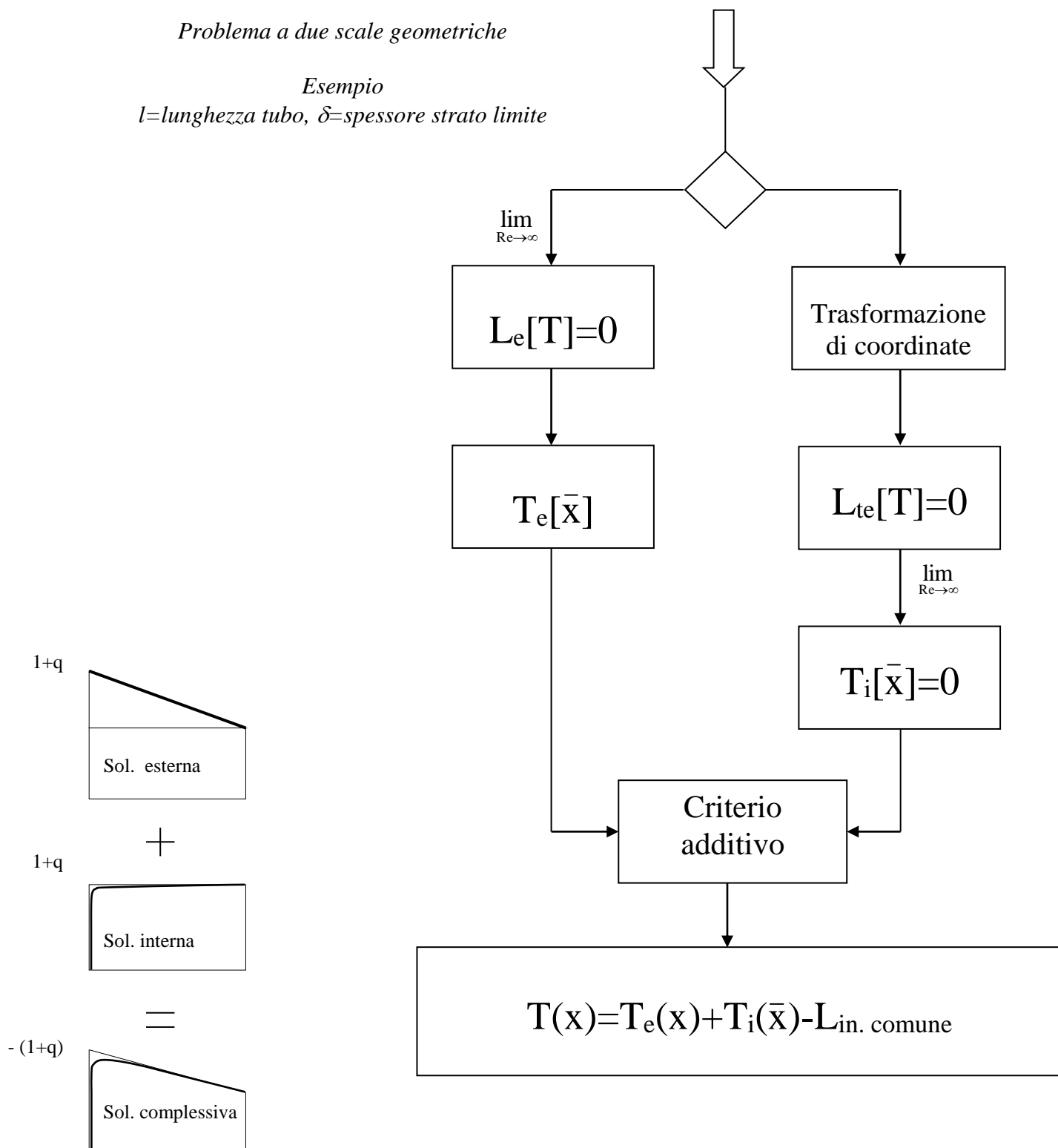
Problema fisico con incognita

$$T(x) \leftarrow L[(T), Re] = 0$$

Problema a due scale geometriche

Esempio

$l$ =lunghezza tubo,  $\delta$ =spessore strato limite



che, come atteso, è uguale alla (10.10) e non soddisfa le (10.6) ad  $x=0$ .

Per superare il problema del non soddisfacimento della condizione al contorno sulla parete ( $x=0$ ) si introduce la teoria dello strato limite che, matematicamente, corrisponde al metodo della perturbazione singolare. Tale metodologia si basa su una trasformazione di coordinate che mediante un ingrandimento locale vicino alla parete, verifica il comportamento locale, lo modifica per soddisfare localmente la condizione al contorno (soluzione interna) senza incidere significativamente sulla soluzione complessiva (detta soluzione esterna).

■ Soluzione esterna

La soluzione esterna è data dalle (10.14). Per  $x=0$  e per  $T(x)=(1+q)-qx$  si ha il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} T_e(x) = 1 + q \quad (10.15)$$

■ Soluzione interna

Operiamo un passaggio di coordinate:

$$x'' = x Pe \quad (10.16)$$

così da avere un ingrandimento locale vicino alla parete:

$$Pe \frac{dT}{dx''} + Pe \frac{d^2T}{dx''^2} = -q \quad (10.17)$$

Per  $Pe \rightarrow \infty$

$$\frac{dT}{dx''} + \frac{d^2T}{dx''^2} = 0 \quad (10.18)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} x' = 0 \rightarrow T_i(x') = 0 \\ \lim_{x'' \rightarrow Pe} T_i(x') = \lim_{x \rightarrow 0} T_e(x) \end{cases} \quad (10.19)$$

cioè si utilizza una condizione di raccordo che mi dice che il limite esterno della soluzione interna è uguale al limite interno della soluzione esterna, essendo la soluzione:

$$\begin{aligned} T(x) &= e^{\lambda x''} \\ \Rightarrow \lambda e^{\lambda x''} + \lambda^2 e^{\lambda x''} &= 0 \end{aligned} \quad (10.20)$$

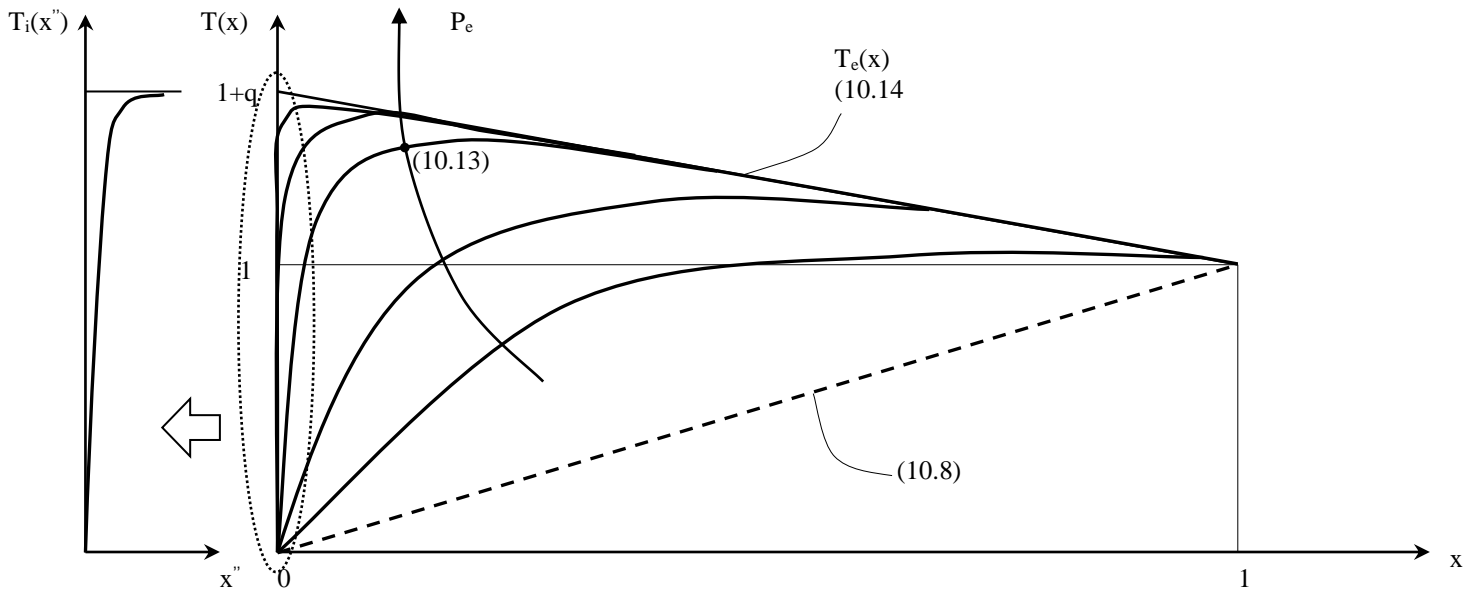
$$\begin{cases} T(x) = C_1 + C_2 e^{-x''} \\ x'' = 0, T(x'') = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0; C_2 = -C_1 \end{cases} \quad (10.21)$$

La soluzione intera è :  $T_i(x'') = C_1(1 - e^{-x''})$

In cui la costante  $C_1$  si determina con la condizione al contorno (10.19b):

$$\begin{cases} T_i(x) = \frac{1+q}{1-e^{-Pe}}(1-e^{-xPe}) \\ T_e(x) = 1+q-qx \end{cases} \quad (10.22)$$

Pertanto, ricordando le (10.8), (10.13) e le (10.22) si ha il risultato riportato in figura:



Bisogna ora individuare un criterio per combinare le soluzioni  $T_i$  e  $T_e$  (10.22) in modo da avere un solo  $T(x)$  che poi confronteremo con la soluzione analitica (10.13). Esistono due criteri, uno additivo ed uno moltiplicativo:

■ Criterio additivo

La soluzione completa è data da :  
 $T(x) = T_e(x) + T_i(x) - \text{limite comune}$   
 cioè :

$$\begin{aligned} T(x) &= (1+q) - qx + \frac{1+q}{1-e^{-Pe}}(1-e^{-xPe}) - (1+q) \\ \Rightarrow T_A(x) &= \frac{1+q}{1-e^{-Pe}}(1-e^{-xPe}) - qx \end{aligned} \quad (10.23)$$

Che, nel presente caso lineare, coincide con la soluzione esatta (10.13) nel caso lineare e pertanto ritengo pienamente soddisfacente.

■ Criterio moltiplicativo

$$T_M(x) = \frac{T_e(x) \cdot T_i(x)}{\text{limite comune}} = \left[ \frac{1+q}{1-e^{-Pe}} (1-e^{-xPe}) \right] \frac{[(1+q)-qx]}{1+q} \quad (10.24)$$

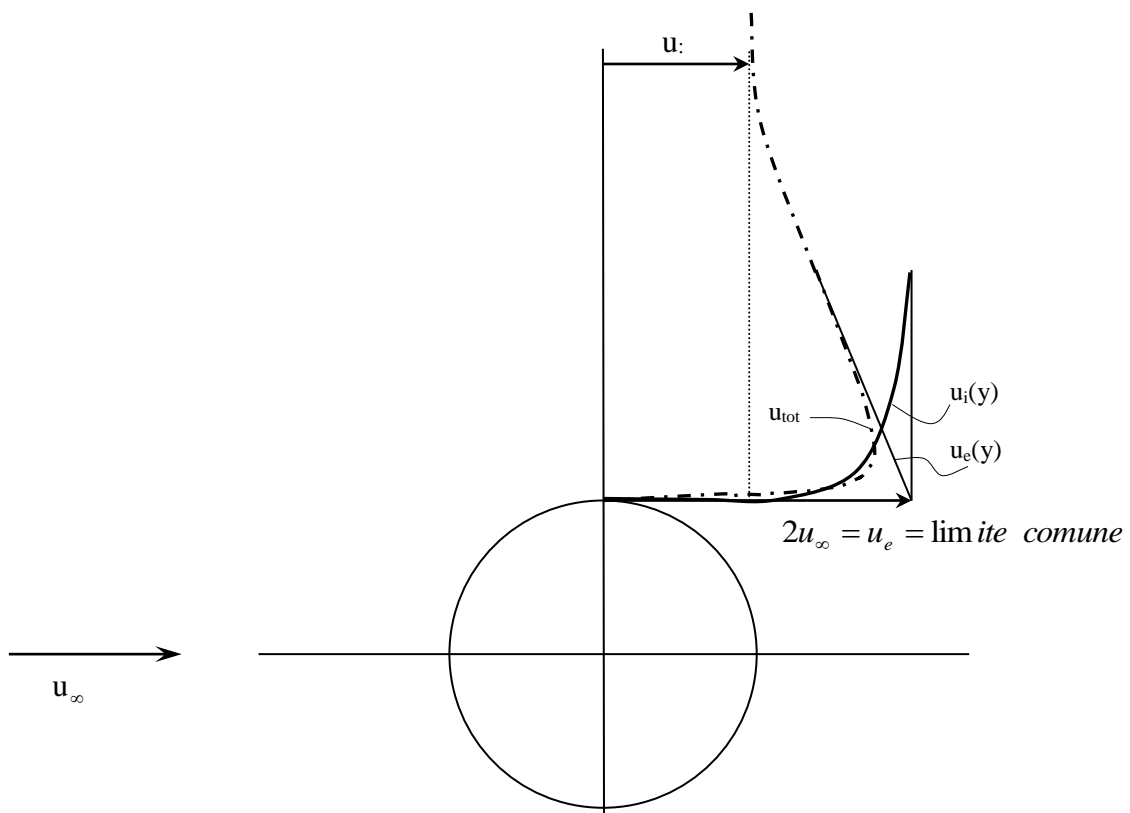
cioè:

$$T_M(x) = \frac{1+q}{1-e^{-Pe}} (1-e^{-xPe}) - qx \frac{1-e^{-xPe}}{1-e^{-Pe}} \quad (10.25)$$

$$T_M = (1+q - qx) \left( \frac{1-e^{-xPe}}{1-e^{-Pe}} \right) \quad (10.26)$$

che però nel presente caso non sembra andare troppo bene.

Vediamo ora come quanto detto può estendersi allo strato limite cinematico. Ad esempio per il cilindro :



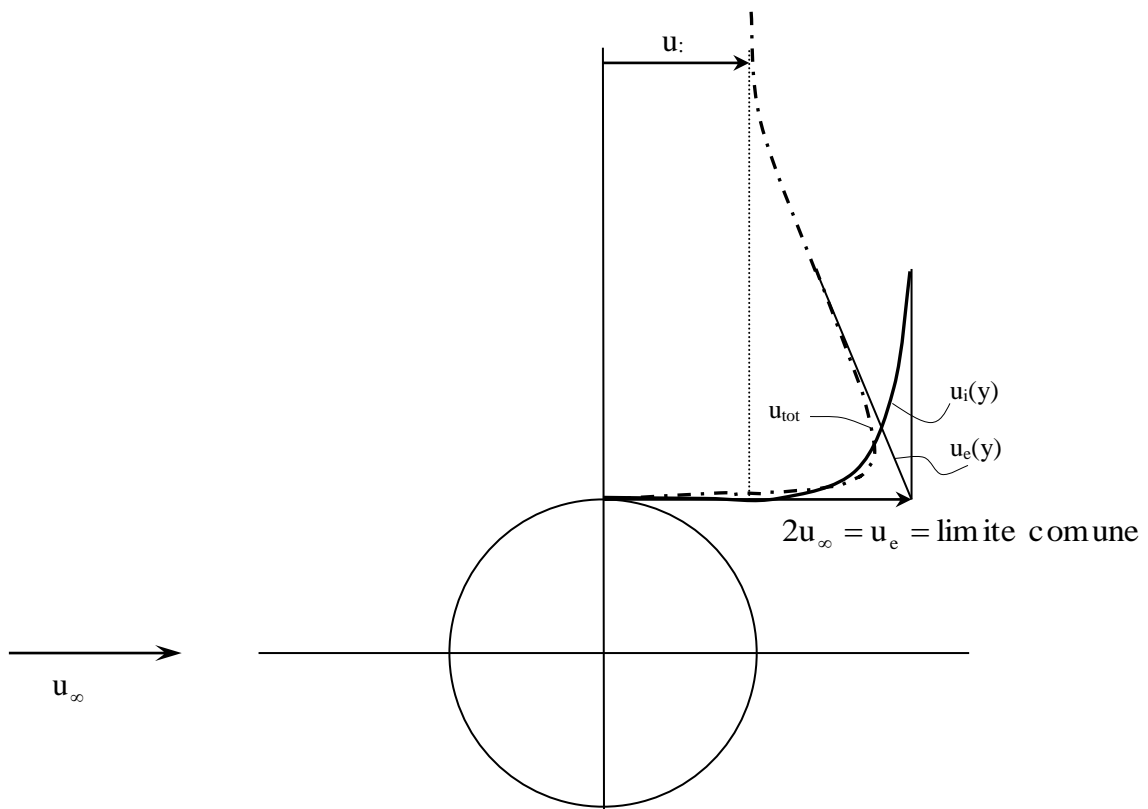
Si può scrivere :  $u_{tot} = u_i + u_e - \text{limite comune}$   
 $v_{tot} = v_i + v_e - \text{limite comune} = v_i$

Il problema è non lineare, bisogna utilizzare un metodo iterativo essendo  $\bar{u}_e = \vec{\nabla} \varphi$  e  $v_e=0$  come il limite comune per la condizione di impermeabilità.



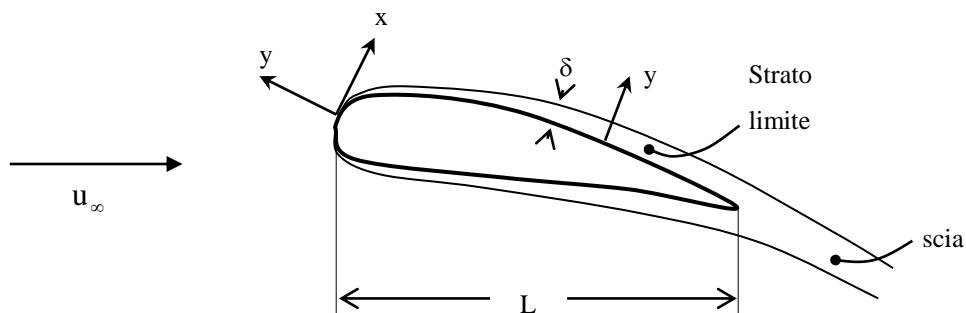
## 10.2 Strato limite cinematico (o dinamico) bidimensionale di un flusso incompressibile, stazionario

Vediamo come le considerazioni fatte in questo semplice esempio possono essere estese allo strato limite (SL) cinematico (dinamico) 2D che per la sua natura fisica è retto da equazioni non lineari. Prendiamo ad esempio un cilindro circolare la cui soluzione è stata presentata al 4.5.3. Per  $g = \frac{\pi}{2}$ ,  $r = a$ ,  $u_\theta = 2u_\infty$  e per quanto visto al 10.1



Per la teoria allo strato limite, ci si pone ( $x'' = R_e x'$ ) molto vicino alla parete e quindi le equazioni sono scritte in coordinate cartesiane di parete (locali). In questo sistema di coordinate si ha:

Consideriamo le equazioni di Navier-Stokes 2D per flussi incompressibili :



$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_1 = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2} \right) \end{array} \right. \quad (10.27.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_2 = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2} \right) \end{array} \right. \quad (10.27.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right. \quad (10.27.c)$$

Poiché le scale geometriche, una legata a  $L$  (corda del profilo) ed una legata allo spessore dello strato limite  $\delta$ , sono molto diverse (problema a due scale), le equazioni come vedremo nel seguito, devono essere scritte in forma adimensionale utilizzando le due diverse scale. Sulla base delle considerazioni fisiche e matematiche si può affermare che per  $Re$  alti:

1. In prossimità della parete i gradienti normali della velocità tangente  $u_\tau = u_1$  devono essere molto elevati in quanto la velocità deve comunque annullarsi sulla parete e la

$$\tau = \mu \frac{\partial u_1}{\partial n}$$

dovrà essere finita. La regione dove i gradienti sono elevati e si risente dell'influenza della viscosità è detta **strato limite** (SL) (in inglese Boundary Layer)

2. In tutta la regione esterna l'effetto della viscosità è trascurabile e pertanto in tale regione il flusso è generalmente irrotazionale e potenziale.

Per adimensionalizzare le (10.27) poniamo :

$$x' = \frac{x_1}{L}; y'' = \frac{x_2}{\delta}; v'' = \frac{u_2}{V}; u' = \frac{u_1}{U} \quad (10.28)$$

essendo  $\delta$  lo spessore convenzionale dello SL alla distanza dal bordo d'attacco pari alla lunghezza di riferimento  $L$ .

- Conservazione della massa

$$\begin{aligned} \frac{U}{L} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial v''}{\partial y''} &= 0 \\ \frac{U}{V} \cdot \frac{\delta}{L} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} &= 0 \end{aligned} \quad (10.29)$$

e quindi affinché i due termini delle 10.29 si possano bilanciare

$$\frac{V}{U} = o\left(\frac{\delta}{L}\right), \text{ cioè } \quad \frac{U}{V} \frac{\delta}{L} = 1 \quad (10.30)$$

L'equazione di conservazione della massa nel nuovo sistema di coordinate  $(x', y'')$  diventa:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \quad (10.31)$$

- Quantità di moto

Consideriamo l'equazione secondo la tangente alla parete (10.27.a).

$$\rho \frac{U^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho \frac{VU}{\delta} v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = \frac{P_0}{L} \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\mu U}{L^2} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \right) \quad (10.32)$$

che possiamo scrivere come  $L(\bar{u}) = 0$  con  $L$  operatore differenziale.

Facendo il limite  $\lim_{Re \rightarrow \infty} L(\bar{u})$  bisogna imporre che compaia almeno un termine viscoso dell'ordine di 1 per bilanciare i termini d'inerzia<sup>1</sup> e portare la velocità a zero sulla parete.

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} L(\bar{u}) = u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} + \frac{1}{Ru} \frac{\partial P'}{\partial x'} - \frac{1}{Re} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} = 0 \quad (10.33)$$

con  $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$  definito nel modo usuale, consegue che

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{1}{Re} = o(1) \Rightarrow \frac{\delta^2}{L^2} = \frac{1}{Re} \quad (10.34)$$

e quindi

$$\delta = o\left(\frac{L}{\sqrt{Re}}\right) \quad (10.35)$$

$$\delta \propto \frac{L}{\sqrt{Re}} \Rightarrow V \propto \frac{U}{\sqrt{Re}} \quad (10.36)$$

$$\text{Quindi : } y'' = x_2 \frac{\sqrt{Re}}{L}; v'' = u_2 \frac{\sqrt{Re}}{U} \quad (10.37)$$

quindi mediante l'analisi dimensionale della prima equazione di Navier-Stokes abbiamo determinato le scale di ingrandimento delle ordinate ( $y$ ) e delle velocità normali ( $v$ ) affinché i valori adimensionali siano dell'ordine di 1.

Formalmente la (10.32) risulterebbe:

---

<sup>1</sup> Si assume nel seguito  $Ru=1$  cioè  $P_0 = \rho U^2$  che è quanto deriva dal flusso potenziale esterno.

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{v''}{\sqrt{Re}} \frac{\partial u'}{\partial y''} \sqrt{Re} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} Re \right)$$

Prendo il limite per Re che tende all'infinito ed ottengo:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \quad (10.38)$$

Analogamente, dalla seconda equazione (componente normale alla parete) :

$$\begin{aligned} \frac{u'}{\sqrt{Re}} \frac{\partial v''}{\partial x'} + \frac{v''}{\sqrt{Re}} \frac{\partial v''}{\partial y''} = -\frac{\partial P'}{\partial y''} \sqrt{Re} + \\ + \left( \frac{1}{Re^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 v''}{\partial x'^2} + \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial^2 v''}{\partial y''^2} \right) \end{aligned} \quad (10.39)$$

Dividendo ambo i membri della precedente con  $\frac{1}{\sqrt{Re}}$  si ha:

$$\frac{u'}{Re} \frac{\partial v''}{\partial x'} + \frac{v''}{Re} \frac{\partial v''}{\partial y''} = -\frac{\partial P'}{\partial y''} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v''}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v''}{\partial y''^2} \quad (10.39 \text{ bis})$$

Facendo il limite per  $Re \rightarrow \infty$  si avrebbe  $\frac{\partial P'}{\partial y''} = o\left(\frac{1}{Re}\right)$  cioè il salto di pressione

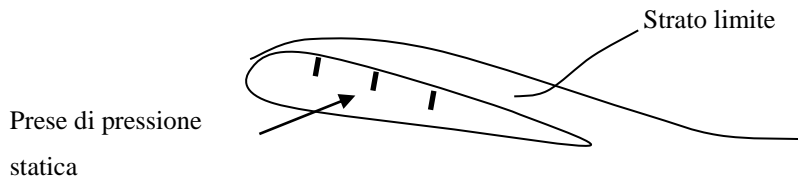
nello strato limite è dell'ordine di  $\int_0^{\delta/L} \frac{\partial P'}{\partial y''} dy''$  e quindi in termini adimensionali

$P\left(\frac{\delta}{L}\right) - P(0) \cong \frac{1}{Re^{3/2}}$ . Ciò ha una fondamentale importanza sia teorico-matematica

che pratica. Infatti dal punto di vista teorico-matematico si ottiene il risultato che

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP_e}{dx}$  cioè la pressione non è più incognita e l'equazione (10.39) è

soddisfatta con notevoli semplificazioni. Inoltre nella sperimentazione le prese di pressione statica possono essere posizionate sulla superficie del corpo (profilo), cioè dentro lo strato limite invece che all'esterno dello strato limite.



Per avere un'idea delle variazioni di P con  $y''$  poniamo

$Re \cdot Ru^{-1} = o(1)$  nelle (10.33)

$$\frac{\tilde{P}_0}{\rho U^2} \frac{LU\rho}{\mu} \approx o(1) \text{ e ricaviamo } \tilde{P}_0 = \frac{\mu U}{L}$$

ad esempio per aria a 10 m/s  $P_0 = o(10^{-4})pasc$  e  $P_0 = o(10^2)pasc$ .e quindi la variazione di pressione nello strato limite è dell'ordine di  $10^{-6}$  rispetto alla pressione dinamica locale (errore certamente accettabile sulla misura).

Pertanto il sistema (10.27) in forma adimensionale e con le scale assunte, si riduce a:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = - \frac{d P_e'}{d x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \end{array} \right. \quad (10.40)$$

che è parabolico in quanto evolve in  $x'$ .

Sono necessarie le condizioni al contorno ( $y''=0$  e  $y''=\infty$ ) e le condizioni iniziali a  $x=x_0'$

$$u' = v'' = 0 \quad \text{sul corpo } (y''=0)$$

$$u' = U_e' \quad \text{all'esterno dello strato limite } (y'' \rightarrow \infty \text{ cioè } y'' = \delta \neq 7)$$

$$u' = \tilde{u}'(y'') \quad \text{per } x' = x_0'$$

che si trasforma in

$$\left\{ \begin{array}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = U_e' \frac{\partial U_e'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \\ u' = v'' = 0 \quad \text{per } y'' = 0 \\ u' = U_e' \quad \text{per } y'' \rightarrow \infty \\ u' = \tilde{u}'(y'') \quad \text{per } x' = x_0' \end{array} \right. \quad (10.41)$$

Tenendo conto che  $U_e$  è nota dalla soluzione esterna potenziale e che:

- scritta fuori dello strato limite la (10.40) rispetta Bernouilli: infatti, per Bernouilli imposto all'esterno :

$$P_e + \frac{1}{2} \rho U_e^2 = cost$$

$$\frac{dP_e}{dx} = - \rho U_e \frac{dU_e}{dx}$$

$$\text{ed in termini adimensionali } \frac{dP_e'}{dx'} = -U_e' \frac{dU_e'}{dx'}$$

che può anche essere ottenuta dalla (10.40) scritta fuori dello strato limite: pertanto può essere sostituita nella (10.40) dando le (10.41)

$$\frac{dP'_e}{dx'} = -U'_e \frac{dU'_e}{dx'} \quad (10.42)$$

Nelle (10.41)  $U'_e$  è la componente della velocità del flusso esterna lungo la tangente al corpo. Si noti che queste equazioni (10.41) non dipendono dal  $Re$  e poiché anche l'equazione del potenziale non dipende dal  $Re$  si può affermare che per  $Re \rightarrow \infty$  sia la soluzione esterna (potenziale) che la soluzione interna (strato limite) non dipendono dal  $Re$ . Pertanto gli unici gruppi adimensionali che potranno comparire sono quelli a carattere geometrico (allungamento, rugosità relativa, ecc.)<sup>2</sup>.

- scritta sul corpo ( $y'^*=0$  e  $u'^*=v'^*=0$ ) la (10.40) dà:

$$\left. \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^{*2}} \right|_{wall} = \frac{dP'_e}{dx'} \quad (10.43)$$

---

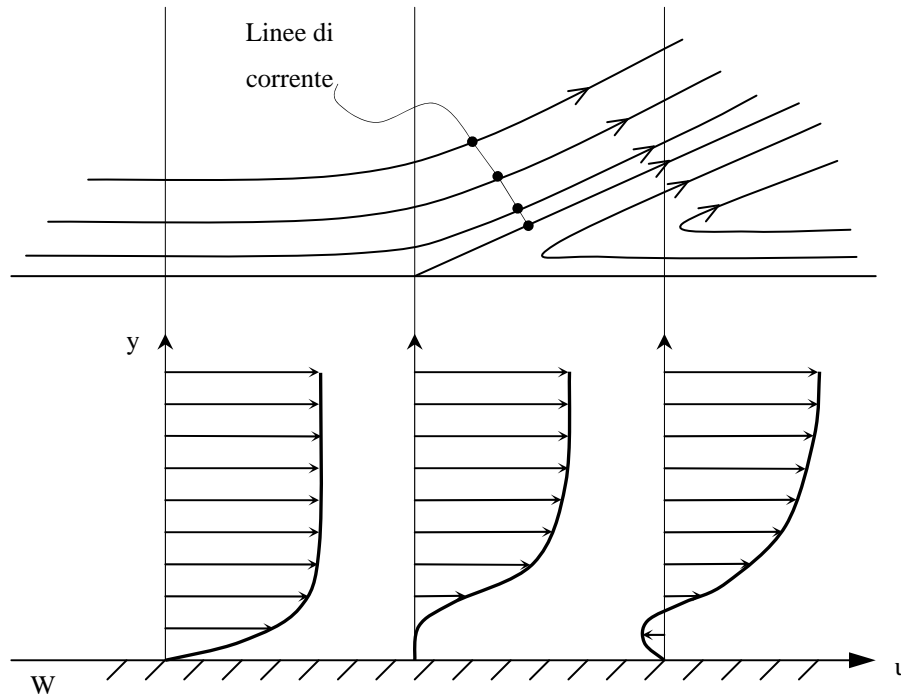
<sup>2</sup> Le equazioni dello strato limite in forma dimensionale risultano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (10.44)$$

$u = v = 0$  sul corpo ( $y = 0$ )  
 $u = U_e$  all'esterno dello strato limite (per  $y \rightarrow \delta$ )  
 $\bar{u} = \bar{u}(y)$  per  $x = x_0$

## 10.3 Separazione dello strato limite

Si parla di separazione quando il flusso rallentato nello strato limite viene trasportato nella corrente principale



$\frac{\partial u}{\partial y} \Big _w > 0$	$\frac{\partial u}{\partial y} \Big _w = 0$	$\frac{\partial u}{\partial y} \Big _w < 0$
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big _w < 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big _w > 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big _w > 0$

In 1  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{Wall} > 0$

In 2  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{Wall} = 0$

In 3  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{Wall} < 0$

(10.45)

Pertanto il punto di separazione si ha dove:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{Wall} = 0 \quad (10.46)$$

(definizione matematica che dice che la velocità è nulla non solo sulla parete ma anche in prossimità della parete).

Dallo strato limite (eq. 10.40) si ha:

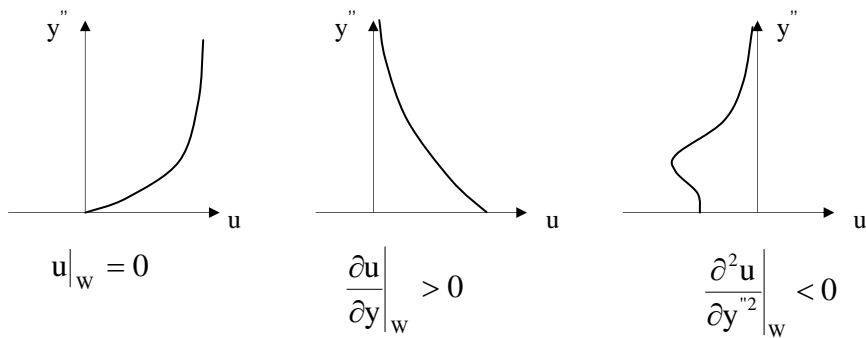
$$u' = 0 \quad v'' = 0$$

$$\Downarrow$$
(10.47)

$$\frac{dP_e'}{dx'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \Big|_{wall} \Rightarrow \text{in forma dimensionale} \Rightarrow \frac{dP_e}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{wall}$$

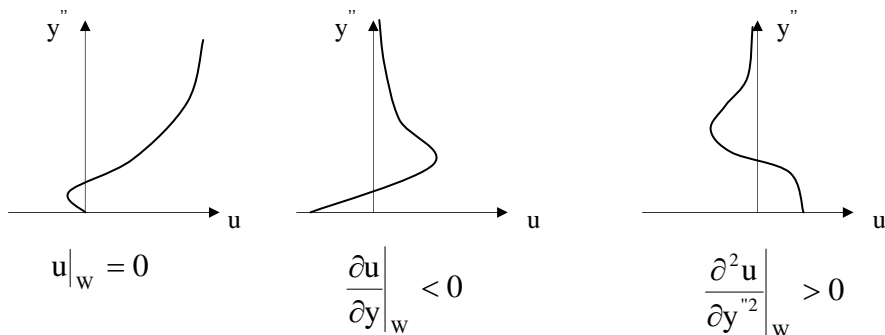
Inoltre, per flussi accelerati si ha  $\frac{dU_e}{dx} > 0$  e quindi  $\frac{dP_e}{dx} < 0$  ma dalle (10.42):

$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \Big|_{wall} < 0$ ; pertanto l'aumento di velocità è una condizione sufficiente ma non necessaria per non avere distacco.



per flussi decelerati  $\frac{dP_e}{dx} > 0$  e quindi:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \Big|_{wall} > 0$$



Da cui si ricava che il distacco è possibile solo in flussi decelerati (ad esempio in divergenti o diffusori). Pertanto la diminuzione di velocità risulta una condizione necessaria ma non sufficiente a produrre il distacco. Si noti che nel punto di distacco si

ha  $\frac{du}{dy} \Big|_{wall} = 0$  e quindi la  $\tau$  alla parete è nulla.



## 10.4 Equazioni dello strato limite in termini di $\psi$ (funzione di corrente)

Essendo le equazioni dello strato limite bidimensionali ed incompressibili (campo solenoidale) si può introdurre la funzione di corrente:

$\psi'(x', y'')$  tale che:

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y''} \quad v'' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \quad (10.48)$$

La condizione  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  (10.31) è ovviamente identicamente soddisfatta dalle (10.48).  
La quantità di moto in  $x'$  dà:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y''} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y''} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y''^2} = \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y''^3} + U'_e \frac{dU'_e}{dx'} \quad (10.49)$$

da completare con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \text{Impermeabilità} &\rightarrow v'' = 0 \Rightarrow \psi' \Big|_{\text{wall}} = 0 \\ \text{Non scorrimento} &\rightarrow u' = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi'}{\partial y''} \Big|_{\text{wall}} = 0 \\ \text{Velocità all}'\infty &\rightarrow u' = U_e \Rightarrow \frac{\partial \psi'}{\partial y''} \Big|_e = U_e \end{aligned} \quad (10.50)$$

piu' la condizione iniziale

$$\text{per } x' = 0 \rightarrow \psi'(y'') = \tilde{\psi}'(y'') \quad (10.51)$$

profilo di  $\psi'$  o di  $u'$  assegnato.

L'equazione (10.49) con le condizioni al contorno (10.50) e (10.51) è un'equazione differenziale del III° ordine alle derivate parziali nell'unica incognita  $\psi'$  e può quindi essere integrata con metodi *numerici alle differenze* (DF=differenze finite, VF=volumi finiti, EF=elementi finiti, ecc.). Altre metodologie applicabili in situazioni particolari sono quelle delle *soluzioni simili* e i *metodi integrali* che vedremo nel seguito.

## 10.5 Soluzioni simili per lo strato limite

In analogia con quanto avviene per le similitudini geometriche, le soluzioni di uno strato limite o in generale di un flusso, si dicono simili se possono essere rese uguali mediante una opportuna trasformazione di coordinate.

Si noti innanzitutto che le equazioni (10.41) e (10.49) sono paraboliche in  $x'$  nel senso che nota  $U'_e(x')$  le velocità in una sezione  $x'_2$  dipendono solo da  $x' < x'_2$  e non da  $x' > x'_2$ . Pertanto nella scalatura (trasformazione di coordinate) c'è da prevedere che  $u'$  sia scalato come ovvio con  $U'_e$  e  $y''$  debba contenere un fattore di scala funzione di  $x'$ .

Condizione di similarità:

$$\frac{u' \{x'_1, [y''/g(x'_1)]\}}{U'_e(x'_1)} = \frac{u' \{x'_2, [y''/g(x'_2)]\}}{U'_e(x'_2)}$$

dove  $g(x')$  è la funzione di scala.

### 10.5.1 Equazioni di Falkner-Skan

Applichiamo ora la seguente trasformazione di coordinate:

$$\xi = x', \quad \eta = \frac{y''}{g(x')} \quad (10.52)$$

ed introduciamo le quantità simili:

$$u'_s = \frac{u'(\xi, \eta)}{U'_e(\xi)} \quad (10.53)$$

e

$$f(\xi, \eta) = \frac{\psi'(\xi, \eta)}{U'_e(\xi) g(\xi)} \Rightarrow \psi'(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) U'_e(\xi) g(\xi) \quad (10.54)^1$$

Teniamo conto che  $\eta = \eta(x', y'')$  nelle operazioni di derivate e indicando nel seguito con l'apice la derivata rispetto a  $\eta$  e con il punto la derivata rispetto a  $\xi$ . Ad esempio:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x'} = -\frac{y''}{g^2} g' \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} = -\eta \frac{g'}{g} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (10.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial y''} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y''} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y''} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (10.56)$$

<sup>1</sup> Si noti che le  $f(\xi, \eta)$  e  $u'_s(\xi, \eta)$  sono congruenti, infatti

$$u'_s(\xi, \eta) = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\psi'(\xi, \eta)}{U'_e(\xi) g(\xi)} \right] = \frac{1}{U'_e} \frac{\partial \psi'}{\partial \eta} = \frac{1}{U'_e} \frac{\partial \psi'}{\partial y''} = \frac{u'}{U'_e}$$

Introdotte nei termini delle (10.49), danno:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y''} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta} \{f(\xi, \eta) U_e(\xi) g(\xi)\} = \frac{f' U_e g}{g} = U_e f' \quad (10.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'}{\partial x'} &= -\eta \frac{\dot{g}}{g} \frac{\partial \psi'}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi'}{\partial \xi} = -\frac{\dot{g}}{g} \eta U_e g f' + \dot{f} U_e g + f (U_e \dot{g}) = \\ &= -\dot{g} \eta U_e f' + \dot{f} U_e g + f (U_e \dot{g}) \end{aligned} \quad (10.58)$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y''^2} = \frac{1}{g^2} f'' U_e g = \frac{1}{g} f'' U_e \quad (10.59)$$

$$\frac{\partial^3 \psi'}{\partial y''^3} = \frac{1}{g^3} f''' U_e g = \frac{1}{g^2} f''' U_e \quad (10.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y''} &= \frac{\partial}{\partial x'} \{U_e f'\} = -\frac{\dot{g}}{g} \eta U_e f' + \dot{f} U_e + f \dot{U}_e = \\ &= -\frac{\dot{g}}{g} \eta U_e f' + (U_e \dot{f}) \end{aligned} \quad (10.61)$$

per cui si ottiene:

$$\begin{aligned} &U_e f' \cdot \left\{ -\frac{\dot{g}}{g} \eta U_e f' + \dot{f} U_e + f \dot{U}_e \right\} + \\ &- \left\{ -\dot{g} \eta U_e f' + \dot{f} U_e g + f (U_e \dot{g}) \right\} \cdot \frac{1}{g} U_e f' + \\ &-\frac{1}{g^2} U_e f'' - U_e \dot{U}_e = 0 \end{aligned} \quad (10.62)$$

Cerchiamo ora di isolare i termini di derivata in  $\eta$  e pertanto dividiamo per  $\frac{U_e}{g^2}$  :

$$\begin{aligned} &-f'' - \left\{ \cancel{g \dot{g} \eta} / U_e f' - \cancel{g \dot{g} \eta} / U_e f' + \left[ g f (U_e \dot{g}) + g^2 \dot{f} U_e \right] \right\} f' + \\ &+ g^2 U_e f' \dot{f} + g^2 U_e f'' - g^2 U_e \dot{U}_e = 0 \end{aligned} \quad (10.63)$$

Separiamo i termini contenenti le derivate di  $f$  rispetto a  $\xi$  (gli  $\dot{f}$ ), da quelli  $f'$ , e cambiamo di segno:

$$\begin{aligned} f'' + g(\dot{U}_e g) f f' + g^2 \dot{U}_e (1 - f^2) &= g^2 U_e f \dot{f} + g^2 U_e f' \dot{f} = \\ &= g^2 U_e (f \dot{f} + \dot{f} f') = G(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (10.64)$$

Si ponga:

$$\alpha = g(\dot{U}_e g) = g^2 \dot{U}_e + g \dot{g} U_e = \beta + g \dot{g} U_e \quad (10.65)$$

essendo

$$\beta = g^2 \dot{U}_e \quad (10.66)$$

Si ottiene quindi:

$$f''' + \alpha(\xi) f f'' + \beta(\xi) (1 - f^2) = G(\xi, \eta) \quad (10.67)$$

Affinchè le soluzioni siano simili [ $f(\xi, \eta) = f(\eta)$ ] si deve avere

$$G(\xi, \eta) = 0 \quad (10.68)$$

il che è garantito dalla circostanza che in  $G$  compaiono le derivate rispetto a  $\xi$  di  $f$  ed inoltre  $\alpha$  e  $\beta$  possono essere solo funzioni di  $\eta$  e pertanto:

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= \text{cost} \\ \beta(\xi) &= \text{cost} \end{aligned} \quad (10.69)$$

si ha quindi:

$$\left. \begin{aligned} \beta + g \dot{g} U_e &= A_1 \\ \beta = \text{cost} &= A_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \dot{g} U_e = A_1 - \beta = A_1 - A_2$$

$$(10.70)$$

$$\Rightarrow g \dot{g} U_e = A \quad \text{con } A \text{ costante arbitraria,}$$

cioè

$$g \frac{dg}{d\xi} = A U_e^{-1}$$

$$(10.71)$$

che può essere integrata per separazione di variabili:

$$\int_0^g g \, dg = \int_0^\xi A U_e^{-1}(\xi) \, d\xi$$

Quindi

$$\frac{g^2}{2} = A \int_0^\xi U_e^{-1}(\xi) \, d\xi$$

(10.72)

Ipotizziamo ora che la velocità del flusso potenziale abbia la forma:

$$U_e(\xi) = c \xi^m \Rightarrow \dot{U}_e = m c \xi^{m-1}$$

con  $c$  costante arbitraria, che si può assumere uguale a 1 ed  $m$  numero si ottiene:

$$U_e(\xi) = \xi^m \Rightarrow \dot{U}_e = m \xi^{m-1}$$

(10.73)

$$\frac{g^2}{2} = A \int_0^\xi \xi^{-m} \, d\xi = \frac{A}{1-m} \xi^{1-m}$$

(10.74)

$$g = \sqrt{\frac{2A}{(1-m)}} \xi^{\frac{1-m}{2}} \Rightarrow g = \sqrt{\frac{1-m}{2}} \sqrt{A} \xi^{-\frac{1}{2}(1+m)}$$

(10.75)

pertanto

$$\beta = g^2 \dot{U}_e = \frac{2A}{(1-m)} \xi^{1-m} m \xi^{m-1} = \frac{2A m}{1-m}$$

(10.76)

solo per comodità assumiamo  $A = \frac{1-m}{2}$  per cui:

(10.77)

$$\beta = m$$

(10.78)

e

$$\alpha = m + g \dot{g} U_e = m + A = m + \frac{1-m}{2} = \frac{m+1}{2}$$

(10.79)

pertanto risulta l'equazione finale:

$$\boxed{f'''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1-f'^2) = 0} \quad (10.80)$$

che è un'equazione differenziale alle derivate ordinarie non lineare del III° ordine detta di Falkner-Skan.

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} f = f' = 0 & \quad \text{per} \quad \eta = 0 \\ f' = 1 & \quad \text{per} \quad \eta \rightarrow \infty \quad (\eta = 4 \div 5) \end{aligned} \quad (10.81)$$

Ci calcoliamo la funzione  $g$ :

$$g(\xi) = \sqrt{\frac{1-m}{1-m}} \sqrt{\xi^{1-m}} \Rightarrow g(\xi) = \sqrt{\xi^{1-m}} \quad (10.82)$$

$$\eta = \frac{y''}{g(\xi)} = y'' \sqrt{\xi^{m-1}} \quad (10.83)$$

Si può calcolare la tensione tangenziale dovuta alla frizione della (1.1) ricordando le (10.28), (10.54.b) e (10.56) :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U \partial u'}{\delta \partial y''} = \mu \frac{U U_e' \partial u'_s}{\delta g \partial \eta} = \mu \frac{U U_e'}{\delta g} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \mu \frac{U U_e'}{\delta g} f'' \quad (10.85)$$

Il coefficiente di tensione (vedi cap. 1.5) alla parete

$$\begin{aligned} C_\tau &= \frac{\tau/w}{q_\infty} = \frac{\tau/w}{1/2 \rho U^2} = 2 U_e' \sqrt{\frac{\mu}{\rho U L} \frac{1}{\xi^{1-m}} f''|_w} = \frac{2 U_e'}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\frac{1}{\xi^{1-m}} f''|_w} = \\ &= 2 \frac{U U_e' \mu L}{\delta g \rho U^2 L} f''|_w = 2 \frac{\sqrt{\text{Re}_L}}{\text{Re}_L} \frac{U_e'}{g} f''|_w = 2 \xi^{\frac{1}{2}(3m-1)} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} f''|_w \end{aligned} \quad (10.86)$$

## 10.5.2 Condizioni nel flusso potenziale esterno che determinano soluzioni simili per SL – Equazione di Blasius

### 10.5.2.1 Equazione di Blasius – Lastra piana

Poniamo  $m=0$  (10.87)

$$U'_e(\xi) = \xi^0 = 1$$

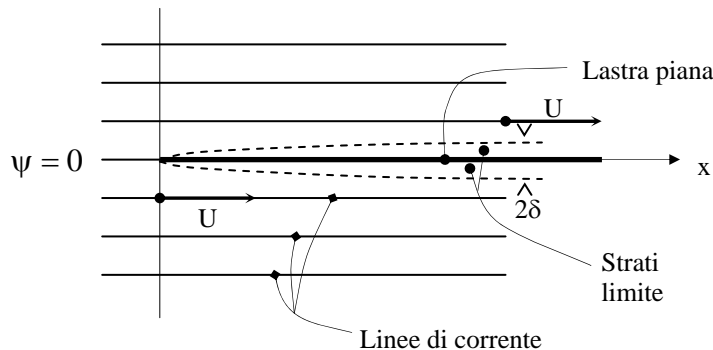
che in termini dimensionali da:

$$\bar{U}_e(x) = 1 \cdot \bar{U} = \bar{U} \quad (10.88)$$

il corrispondente potenziale totale è:

$$\phi_{Tot} = U \cdot x$$

che è il potenziale di un flusso uniforme indisturbato. Pertanto la (10.88) corrisponde alla soluzione potenziale di un flusso intorno ad una lastra piana ad incidenza nulla (tab. 4.2)



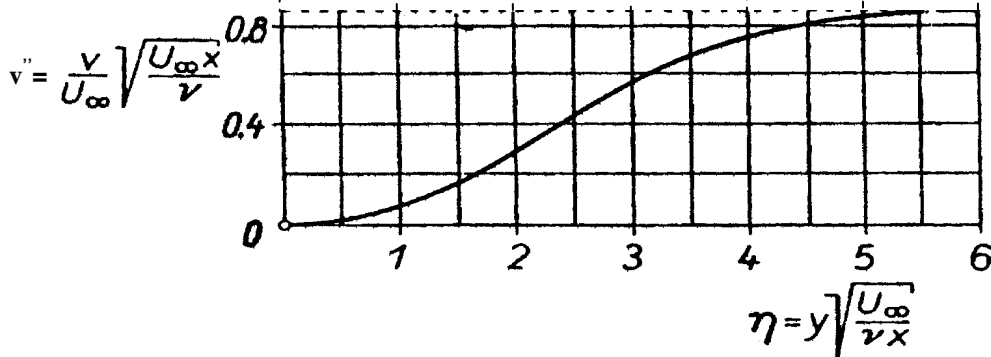
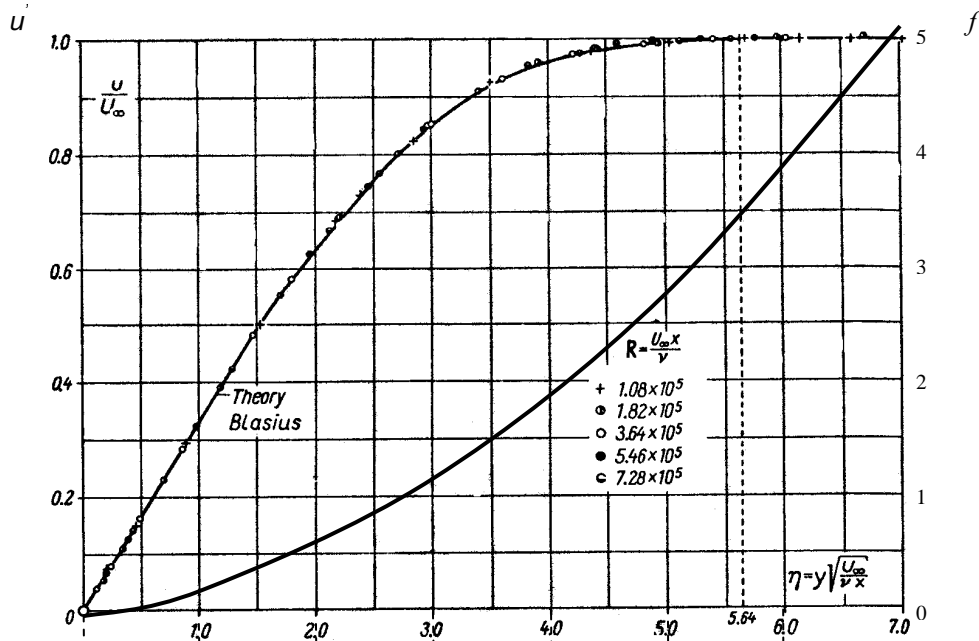
L'equazione (10.80) risulta :

$$f'''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (10.89)$$

con le condizioni al contorno (10.81), detta equazione di Blasius, che la scoprì (nel 1908) e la cui soluzione numerica è riportata nella tabella e nella figura insieme a confronti con esperimenti.

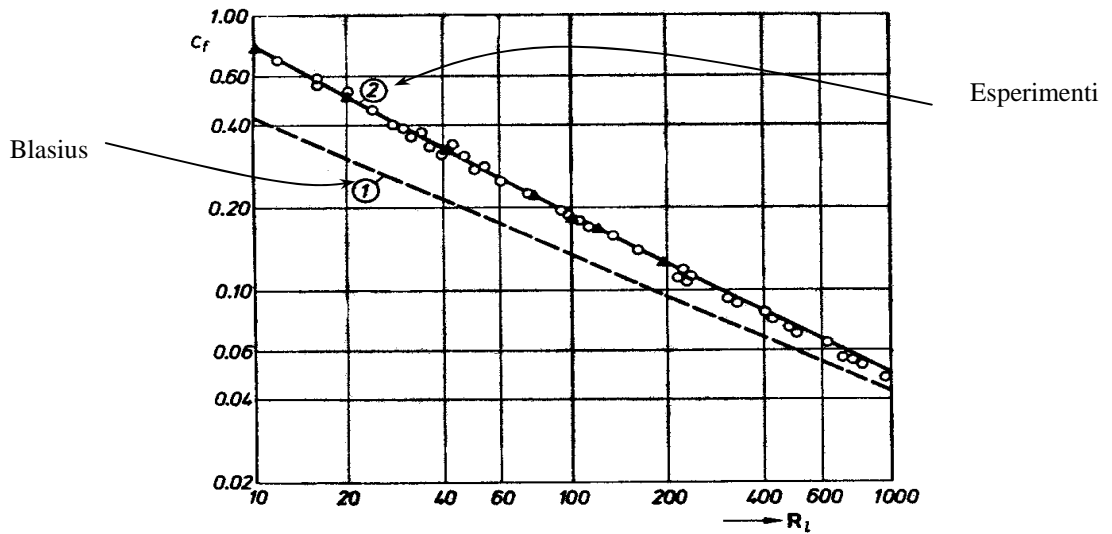
Si noti che per  $\eta = 0$  l'equazione diventa  $f'''' = 0$  che corrisponde a  $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_w = 0$  cioè ad una curvatura nulla (assenza di distacco).

$\eta$	$f$	$f' = \frac{U}{U_\infty}$	$f''$
0	0	0	0.332
1	0.166	0.3298	0.323
3	1.397	0.8461	0.161
5	3.28	0.991	0.01591
7	5.28	0.99992	0.00022
8	6.279	1.00000	0.00001





Come si vede per  $Re \rightarrow \infty (> 10^6)$  la soluzione di Blasius è esatta, nel senso che i punti sperimentali si collocano nelle soluzioni teoriche:



Per  $Re < 1000$  risulta una notevole approssimazione in quanto decadono le ipotesi che hanno portato alla formulazione asintotica di SL – flusso di Eulero.

Per Blasius la  $g$  tenendo conto delle (10.82) diventa:

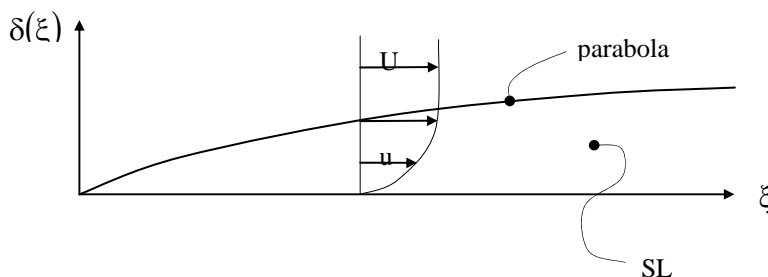
$$g = \sqrt{\xi^1} = \xi^{1/2} \quad (10.90)$$

$$\eta = \frac{y''}{\sqrt{\xi}} \quad (10.91)$$

pertanto la linea ad  $\eta = cost.$ , dove assumiamo che finisca convenzionalmente lo SL, corrisponde a  $y'' = c\xi^{1/2}$  e quindi lo spessore dello SL aumenta di  $\delta(\xi) \propto \xi^{1/2}$  cioè

$$\delta(\xi) = \delta(1) \xi^{1/2}, \text{ cioè lo spessore va come una parabola } \delta^2(\xi) = c^2 \delta^2(1) \xi = \frac{AL}{Re_L} \xi$$

con il coefficiente  $A$  da definire convenzionalmente.



Se  $c_\tau$  risulta per Blasius:

$$c_\tau = \frac{2 \times l}{\sqrt{Re}} \frac{l}{\sqrt{\xi}} f''|_w \quad (10.92)$$

$$\text{ma } \text{Re} \cdot \xi = \frac{\rho U L}{\mu} \xi = \frac{\rho U x}{\mu} = \text{Re}_x \quad (10.93)$$

e quindi

$$c_\tau(x) = \frac{2}{\sqrt{\text{Re}_x}} f''|_w \quad (10.94)$$

con  $f''|_w = f''(y''=0) = 0.332$  dalle tabelle.

Quindi il coefficiente d'attrito varia come  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  ovvero diminuisce al crescere di  $x$

$$c_\tau = 0.664 \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (10.95)$$

Il coefficiente di resistenza aerodinamica di una lastra infinita sottile di profondità unitaria (solo attrito)

$$c_D = \frac{D}{q_\infty S} = \int_0^1 2c_\tau d\xi = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}} \int_0^1 \xi^{-1/2} d\xi = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}} [2\sqrt{\xi}]_0^1 = \frac{2.656}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (10.96)$$

### 10.5.2.2 Flusso contro una parete (ristagno)

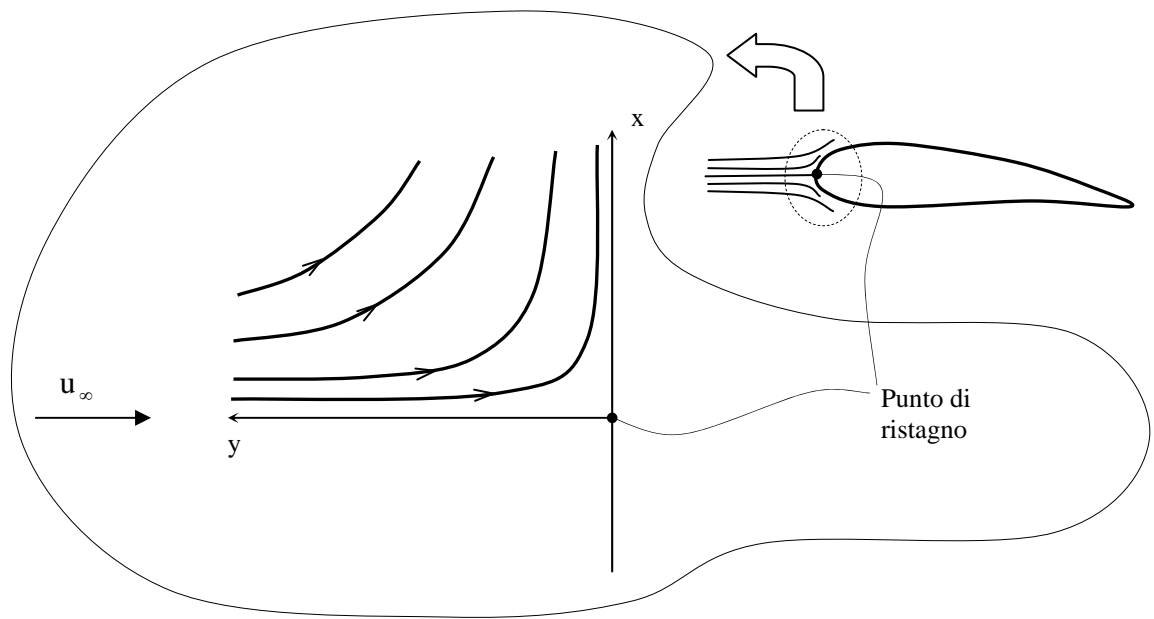
$$\text{Poniamo } m=1 \quad (10.97)$$

$$\bar{U}_e(\xi) = \xi \quad (10.98)$$

che in termini dimensionali dà:

$$\begin{aligned} U_e(x) &= cx \\ V_e(y) &= -cy \end{aligned} \quad (10.99)$$

che corrisponde al flusso potenziale contro una parete, come avviene intorno a tutti i punti di ristagno davanti a corpi aerodinamici.



Infatti, il potenziale (come presentato prima) risulta:

$$\varphi = U(x^2 - y^2) \quad (10.100)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2Ux \quad (10.101)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2Uy \quad (10.102)$$

e quindi

$$c = 2U$$

L'equazione (10.80) risulta:

$$f'''' + ff'' + (1 - f'^2) = 0 \quad (10.103)$$

con le condizioni al contorno (10.81). Sulla parete si ha  $f''' = -1$  cioè  $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_w < 0$  ed è quindi stabile (curvatura negativa). Per questa formulazione, la  $g$  diventa:

$$g = 1 \quad (10.104)$$

$$\eta = y'' \quad (10.105)$$

cioè

$$\delta(\xi) = \delta(1) \quad (10.106)$$

cioè lo spessore rimane costante lungo  $\xi$ .

Il  $c_\tau$  dalle (10.86) risulta essere:

$$c_\tau = \frac{2U'_e}{\sqrt{\text{Re}_L}} f''|_w = \frac{2f''|_w}{\sqrt{\text{Re}_L}} \xi \quad (10.107)$$

che cresce linearmente con  $\xi$ .

### 10.5.2.3 Divergente e convergente 2D

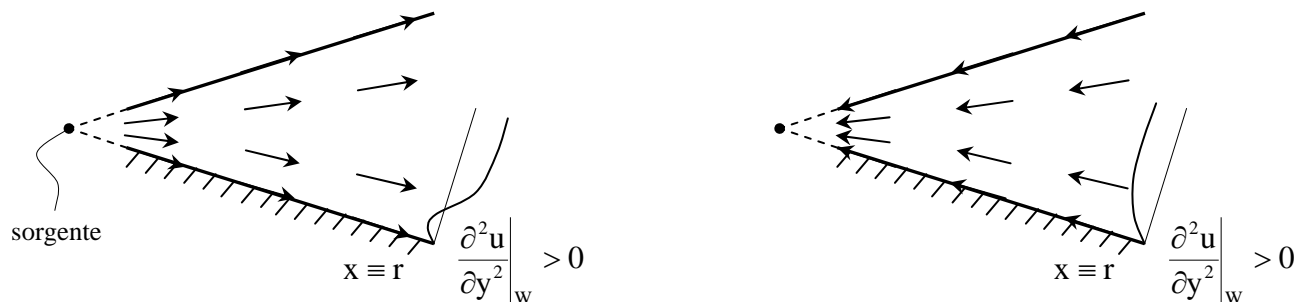
Poniamo

$$m = -1 \quad (10.108)$$

$$U'_e(\xi) = \xi^{-1} \quad (10.109)$$

che in termini dimensionali da:

$$U_e(x) = c x^{-1}$$



per  $x \equiv r$

la  $U_e(r) = c r^{-1} = \frac{c}{r} = \frac{1}{2\pi r}$  che è la velocità indotta da una sorgente (pozzo)<sup>2</sup> con

$$c = \frac{1}{2\pi} \quad c \text{ intensità unitaria}$$

Il corrispondente potenziale sarà (tab. 4.2)

$$\varphi = \frac{m}{2\pi} \ln r$$

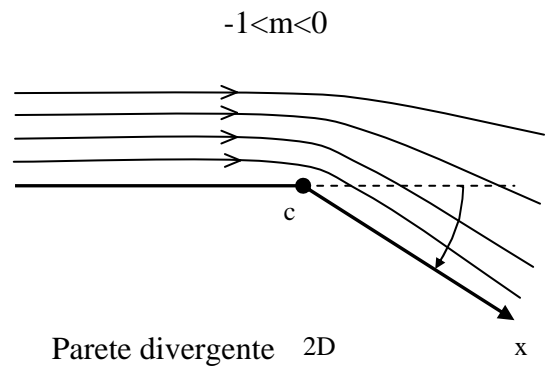
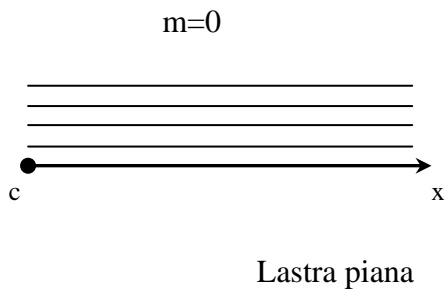
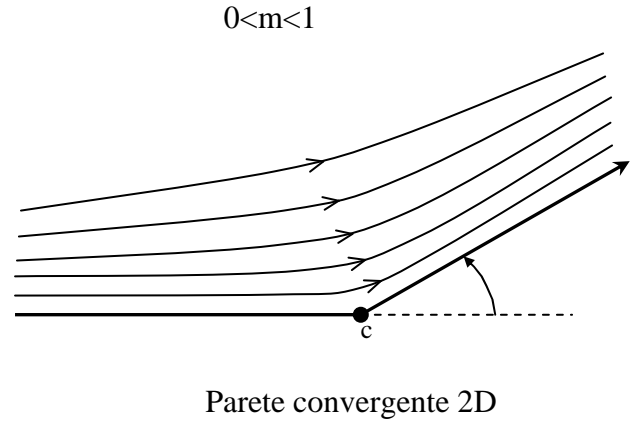
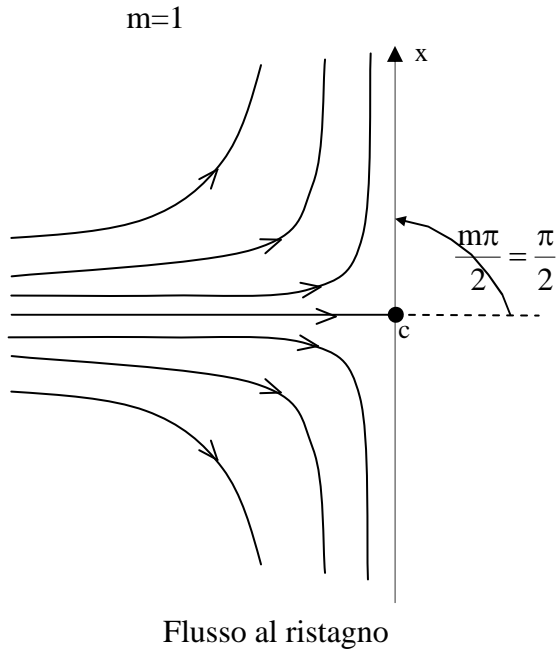
Pertanto corrisponde al flusso in un diffusore o in un divergente 2D.

L'equazione (10.80) risulta:

$$f'''' - (1 - f'^2) = 0 \Rightarrow f'''' + f'^2 - 1 = 0 \quad (10.110)$$

<sup>2</sup> Nel caso del pozzo (convergente 2D) è necessario cambiare gli estremi d'integrazione nella (10.71) o in alternativa cambiare le condizioni al contorno (10.81)  $f'(\eta \rightarrow \infty) = -1$ .

con le condizioni al contorno (10.81). Sulla parte  $f''' = 1$ , cioè  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w > 0$  che corrisponde ad una situazione di flusso distaccato (la teoria dello strato limite perde di validità).



Per questa formulazione la  $g$  (10.82) diventa:

$$g = \sqrt{\xi^{1-m}} = \xi \tag{10.111}$$

$$\eta = \frac{y''}{\xi}$$

cioè:

$$\delta(\xi) = \delta(1) \cdot c \xi \tag{10.112}$$

cioè lo spessore cresce linearmente con  $\xi$  fino al valore massimo che sarà:

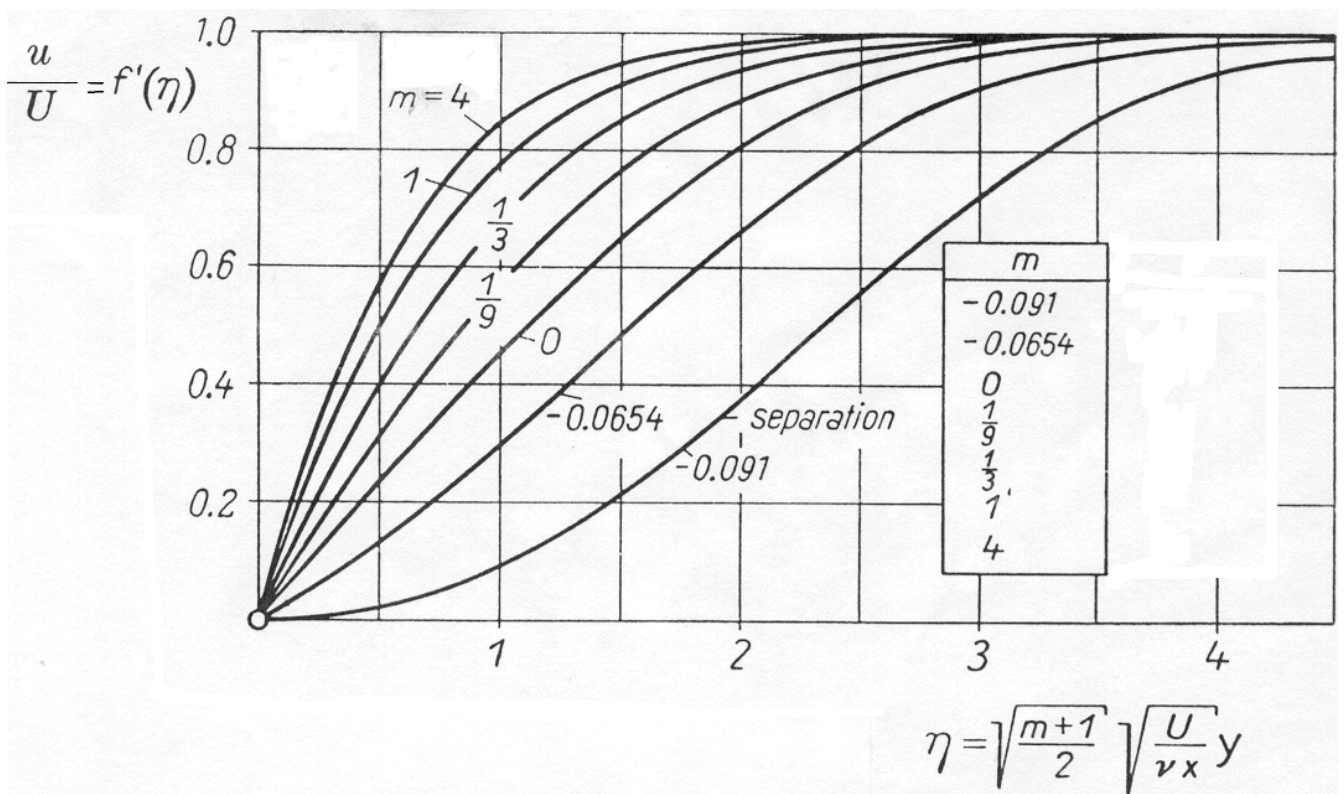
$$\delta(1) = A \frac{L}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (10.113)$$

Il  $c_\tau$  risulta, ricordando le (10.86):

$$c_\tau = \frac{2U_e'}{\sqrt{\text{Re}_L}} \sqrt{\frac{1}{\xi^{1-m}}} f''|_w = \frac{2U_e'}{\sqrt{\text{Re}_L}} f''|_w = \frac{2}{\sqrt{\text{Re}_L} \xi^2} f''|_w = \frac{2f''|_w}{\sqrt{\text{Re}_L}} \frac{1}{\xi^2} \quad (10.114)$$

ovvero il  $c_\tau$  varia come  $\frac{1}{\xi^2}$  ovvero diminuisce come il quadrato di  $\xi$  andando verso

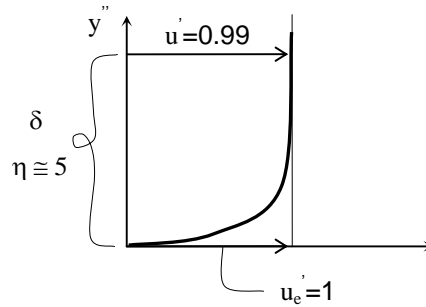
valle nel diffusore. Il termine  $f''|_w$  è calcolabile una volta per tutte mediante integrazione della (10.99). Si verifica che per  $m=-1$  e divergente si ha il distacco. Nel caso del convergente il cambiamento di segno nella condizione al contorno realizza velocità negative e quindi curvature positive corrispondono a situazioni stabili (assenza distacco). Si possono considerare le situazioni riportate negli schemi che seguono. Nel caso di divergente 2D la situazione limite per il distacco è dove la  $m=-0.091$ . Nel caso del convergente non si ha mai distacco.



## 10.6 Spessore dello strato limite

Sono possibili diverse definizioni di spessore dello SL:

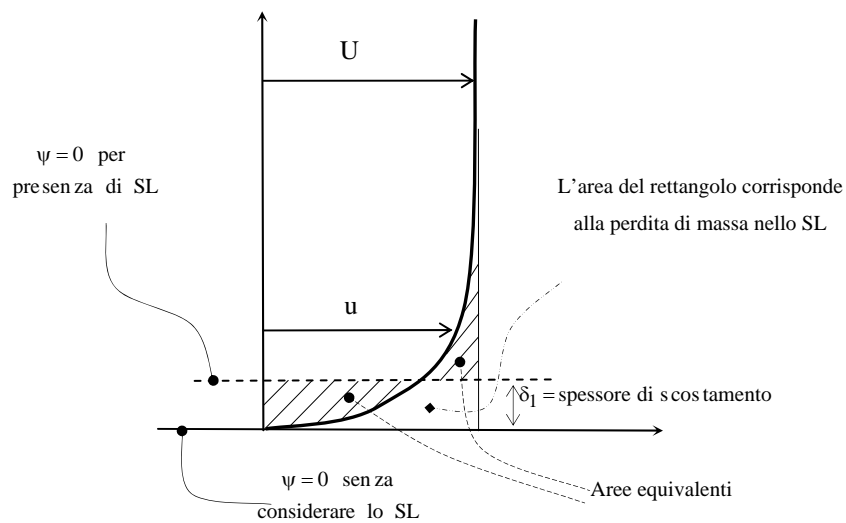
- Blasius ha definito come spessore  $\delta$  convenzionalmente la distanza per la quale  $u'_s = u'/U'_e = u/U_e = 0.99$ ,



Si trova  $\eta \cong 5$  e corrispondentemente:

$$\delta_B = 5\delta(1)\xi^{1/2} = \frac{5L}{\sqrt{Re_L}} \xi^{1/2} = 5\sqrt{\frac{L\mu}{U\rho}} = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (10.122)$$

- Piu' interessante è lo spessore di scostamento  $\delta_1$  che rappresenta lo spessore di cui bisogna aumentare lo spessore del corpo per tenere conto di quanto si spostano le linee di corrente per effetto dello SL.



$$U_e \delta_1 = \int_0^\infty (U_e - u) dy \quad (10.123)$$

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (10.124)$$

ma

$$u = U_e f' \quad (10.125)$$

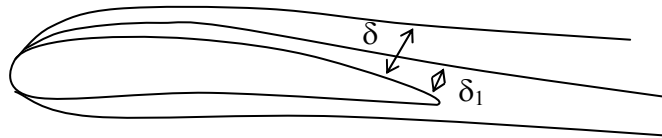
e quindi per Blasius (lastra piana) si ha:

$$\delta_{1B} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} [\eta_{max} - f(\eta_{max})] \quad (10.126)$$

da cui (con la formula di Blasius) si ottiene:

$$\delta_{1B} = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}$$

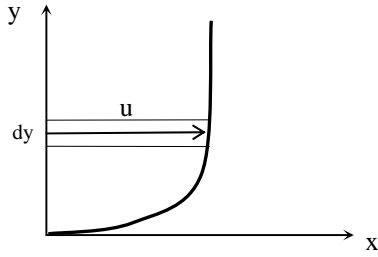
che è circa 1/3 della definizione della (10.122)



- Spessore di quantità di moto  $\delta_2$ . Questa quantità misura, analogamente allo spessore di scostamento  $\delta_1$ , la distanza di cui si deve aumentare lo spessore del corpo per riequilibrare la perdita di quantità di moto dovuta allo SL.

$$U_e^2 \delta_2 = \int_0^{\infty} u (U_e - u) dy \quad (10.127)$$





La quantità di moto associata alla massa

$$dm = \rho u dy \quad (10.128)$$

sarà, alla velocità esterna  $U_e$ :

$$dm \cdot U_e = \rho U_e u dy \quad (10.129)$$

La quantità di moto alla velocità  $u$  (alla distanza  $y$ ), sarà

$$dm \cdot u = \rho u^2 dy \quad (10.130)$$

pertanto la perdita di quantità di moto della massa  $dm$  risulta:

$$\rho U_e^2 \delta_2 = \int_0^{\infty} (\rho u U_e - \rho u^2) dy = \rho U_e^2 \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (10.131)$$

La (10.131) uguaglia le perdite della quantità di moto della massa  $dm$  alla quantità di moto posseduta dal fluido alla velocità  $U_e$ .

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (10.132)$$

Nel caso di lastra piana (Blasius):

$$\delta_2 = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}}$$

che è circa 1/8 di  $\delta_B$ .

## 10.7 Metodi integrali per lo strato limite (equazione di Von Karmann-Polausen)

Integriamo l'equazione del moto per lo strato limite in forma dimensionale (10.44) su uno spessore ( $h$ ) maggiore dello strato limite:

$$\int_{y=0}^h \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.133)$$

avendo definito con  $\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w$  la tensione tangenziale alla parete, ed essendo:

$$\mu \int_0^h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^h = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w \quad (10.134)$$

Dall'equazione di conservazione della massa (10.44):

$$v = -\int_0^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \quad (10.135)$$

per cui

$$\int_{y=0}^h \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.136)$$

Integrando per parti, si ottiene per il secondo termine a primo membro:

$$\int_{y=0}^h \left( \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy = \left[ u \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right]_0^h - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy = U_e \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (10.137)$$

per cui si ottiene:

$$\int_{y=0}^h \left( 2u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.138)$$

cambiando di segno e riorganizzando i termini:

$$\int_{y=0}^h \frac{\partial}{\partial x} [u(U_e - u)] dy + \frac{dU_e}{dx} \int_{y=0}^h (U_e - u) dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.139)$$

ma ricordando le definizioni di  $\delta_1$  e  $\delta_2$  (par. 10.6) e facendo il limite per  $h \rightarrow \infty$ , si ha:

$$\frac{d(U_e^2 \delta_2)}{dx} + \delta_1 U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.140)$$

Questa è l'equazione integrale della quantità di moto per uno strato limite bidimensionale, incompressibile e stazionario, detta *equazione di Von Karmann*. È una equazione differenziale alle derivate ordinarie in  $x$  (nota  $U_e(x)$ ) negli spessori  $\delta_1$  e  $\delta_2$  ed in  $\tau_0$ . Può anche essere riscritta come:

$$U_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_2 + \delta_1) U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.141)$$

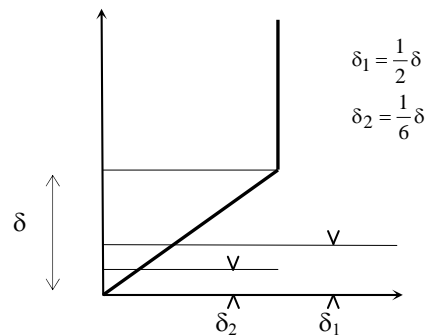
Come si può vedere, fissata la forma di  $u(\eta)$ , ad esempio lineare:

$$\frac{u}{U_e} = l(\eta) = a\eta + b$$

con condizioni al contorno:

$$\eta = 0 \quad l(0) = 0$$

$$\eta = 5 \quad l(5) = 1$$



o un polinomio del quarto grado (proposta da Polausen)

$$\frac{u}{U_e} = l(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 + e \quad (10.142)$$

per il quarto grado le condizioni sono:

nella parete

$$\eta = y = 0$$

fuori dallo SL

$$\eta \rightarrow \infty \quad y = \delta$$

L'equazione (10.141) si può integrare in  $x$  con  $\delta$  come incognita, e determinare successivamente  $\delta_1(x)$ ,  $\delta_2(x)$  e  $\tau_w(x)$  (tensione tangenziale alla parete). Ad esempio, per il quarto grado le condizioni sono:

$$1) \quad \eta = y = 0 \quad u = 0 \Rightarrow e = 0$$

$$2) \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -U_e \frac{dU_e}{dx}$$

$$3) \quad \eta \rightarrow \infty \quad y = \delta \quad u = U_e$$

$$4) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Si consideri che la quantità

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

data la forma, è nota a meno di un fattore di scala  $\delta(x)$ .

Si noti che nel caso di una lastra piana, si può porre:

$$U_e = U \quad \text{e} \quad \frac{dU_e}{dx} = 0$$

per cui l'equazione (10.141) diventa:

$$U^2 \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

e quindi

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta_2}{dx}$$

## 10.8 Esercizi relativi al capitolo 10

Riassumiamo brevemente alcuni dei risultati già visti che saranno utili per gli esercizi. Dalla teoria di Blasius si ha<sup>1</sup>:

$$C_\tau = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (\text{da notare che questa quantità viene spesso indicata come spessore geometrico})$$

$$\delta_1 = \frac{1.72x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

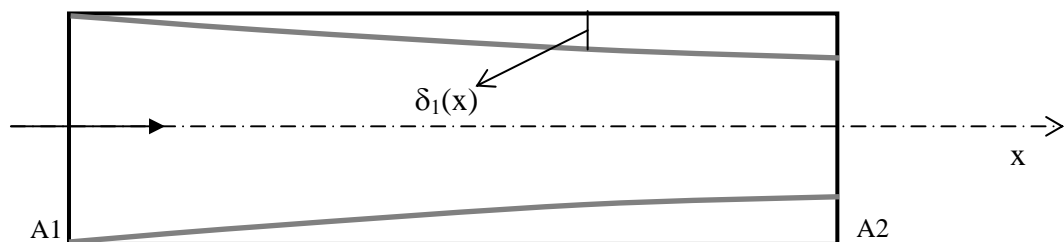
$$\delta_2 = \frac{0.664x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

### **Es. 10.1**

L'aria fluisce attraverso un condotto di sezione quadrata di area  $0.15\text{m}^2$  formando uno strato limite sulle pareti. Il fluido, nella regione al di fuori dello strato limite, può essere considerato inviscido e con profilo di velocità uniforme. Sapendo che lo spessore di scostamento varia con  $x$  secondo la legge:

$$\delta_1 = 0.007 \left( x^{\frac{1}{2}} \right)$$

e tenendo conto che la velocità media nella sezione di ingresso è pari a  $3\text{m/s}$ , determinare la velocità media dell'aria dentro il condotto ma al di fuori dello strato limite nella posizione  $x=1\text{m}$ . Assumere lo spessore dello strato limite nullo nella sezione di ingresso.



### **Es. 10.2**

---

<sup>1</sup> Si noti che nel caso di SL turbolento si osserva una dipendenza del tipo  $\text{Re}_x^{-1/5}$  invece di  $\text{Re}_x^{-1/2}$  del caso laminare

Si consideri un flusso laminare di un fluido incompressibile su di una lastra piana (Blasius). Il profilo di velocità viene approssimato da una semplice relazione lineare del tipo:

$$u(y) = \frac{U}{\delta} y \quad \text{per} \quad 0 \leq y \leq \delta$$

$$u(y) = U \quad \text{per} \quad y > \delta$$

Determinare  $\delta(x)$  (spessore geometrico) e gli sforzi di taglio utilizzando l'equazione integrale di Von Karman semplificata per il caso della lastra piana. Paragonare i risultati ottenuti con ciò che si ottiene dalla teoria di Blasius.

### **Es. 10.3**

Un flusso stazionario si muove con velocità  $U=3m/s$  su di una lastra piana. Determinare approssimativamente in quale posizione  $x_{cr}$  e con quale spessore (geometrico)  $\delta(x_{cr})$  di strato limite, si ha la transizione da strato limite laminare a turbolento, nel caso di acqua a 15°C, aria in condizioni di atmosfera standard e glicerina a 20°C. Assumere che il Reynolds critico ( $Re_{x_{cr}}$ ) di transizione sia  $5 \times 10^5$  e che siano valide le formule di Blasius per lo strato limite (lastra piana).

Fluido	$\nu$ (m <sup>2</sup> /s)	$x_{cr}$ (m)	$\delta(x_{cr})$ (m)
Aria	$1.5 \times 10^{-5}$		
Acqua	$1.12 \times 10^{-6}$		
Glicerina	$1.19 \times 10^{-3}$		

### **Es. 10.4**

Si consideri un flusso turbolento di un fluido incompressibile su di una lastra piana. Il profilo di velocità nello strato limite può essere approssimato nel modo seguente:

$$\frac{u(y)}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{per} \quad 0 \leq y \leq \delta$$

$$u(y) = U \quad \text{per} \quad y > \delta$$

(si noti che questo andamento è in buon accordo con i profili sperimentali anche se alla parete fornisce la condizione non fisica  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{wall} = \infty$ ). Gli sforzi di taglio possono essere ottenuti dalla seguente relazione ottenuta sulla base di osservazioni sperimentali:

$$\tau_0 = 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}$$

Determinare gli spessori di strato limite ( $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ) e gli sforzi di taglio alla parete al variare della distanza  $x$ . Determinare anche il coefficiente di resistenza di attrito  $C_\tau$ .

## 10.9 Soluzione degli esercizi relativi al capitolo 10

Riassumiamo brevemente alcuni dei risultati già visti che saranno utili per gli esercizi. Dalla teoria di Blasius si ha<sup>1</sup>:

$$C_\tau = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (\text{da notare che questa quantità viene spesso indicata come spessore geometrico})$$

$$\delta_1 = \frac{1.72x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

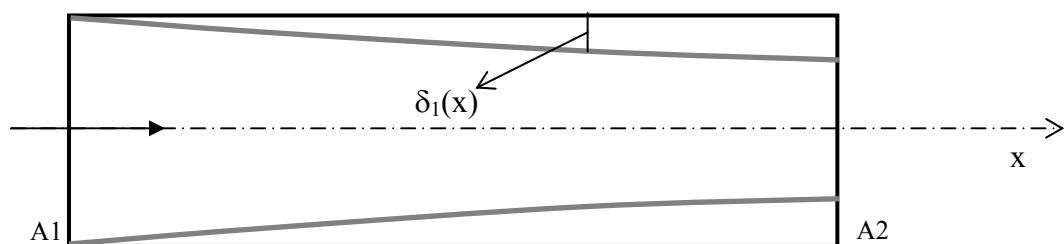
$$\delta_2 = \frac{0.664x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

### **Es. 10.1**

L'aria fluisce attraverso un condotto di sezione quadrata di area  $0.15\text{m}^2$  formando uno strato limite sulle pareti. Il fluido, nella regione al di fuori dello strato limite, può essere considerato inviscido e con profilo di velocità uniforme. Sapendo che lo spessore di scostamento varia con  $x$  secondo la legge:

$$\delta_1 = 0.007 \left( x^{\frac{1}{2}} \right)$$

e tenendo conto che la velocità media nella sezione di ingresso è pari a  $3\text{m/s}$ , determinare la velocità media dell'aria dentro il condotto ma al di fuori dello strato limite nella posizione  $x=1\text{m}$ . Assumere lo spessore dello strato limite nullo nella sezione di ingresso.



### **Soluzione Es. 10.1**

Per quanto riguarda l'area utile si ha:

---

<sup>1</sup> Si noti che nel caso di SL turbolento si osserva una dipendenza del tipo  $\text{Re}_x^{-1/5}$  invece di  $\text{Re}_x^{-1/2}$  del caso laminare



$$A_u(x) = (l - 2\delta)^2$$

Lo spessore dello strato limite è, invece:

$$\delta_1 = (\text{Blasius}) = 1.72 \sqrt{\frac{ux}{U_1}} = \delta_1(x)$$

Per quanto riguarda la portata si ha:

$$Q = \text{cost} = A \cdot U_1 = 0.48 \text{ m}^3/\text{s}$$

Da cui:

$$u(x) = \frac{Q}{A_u(x)} = \frac{Q}{(l + 2\delta)^2}$$

Per  $x = 1 \text{ m}$  si ha:

$$\delta_1 = 1.72 \sqrt{\frac{ux}{U_1}} = 0.0038 \text{ m}$$

$$u(x) = \frac{Q}{A_u(x)} = \frac{Q}{(l + 2\delta)^2} = 3.119 \text{ m/s}$$

### **Es. 10.2**

Si consideri un flusso laminare di un fluido incompressibile su di una lastra piana (Blasius). Il profilo di velocità viene approssimato da una semplice relazione lineare del tipo:

$$u(y) = \frac{U}{\delta} y \quad \text{per} \quad 0 \leq y \leq \delta$$

$$u(y) = U \quad \text{per} \quad y > \delta$$

Determinare  $\delta(x)$  (spessore geometrico) e gli sforzi di taglio utilizzando l'equazione integrale di Von Karmann semplificata per il caso della lastra piana. Paragonare i risultati ottenuti con ciò che si ottiene dalla teoria di Blasius.

### Soluzione Es. 10.2

L'equazione che fornisce gli sforzi di taglio alla parete, è la seguente:

$$\tau_w = \rho u^2 \frac{d\theta}{dx} \quad \text{con} \quad \theta = \text{spessore della quantità di moto.}$$

Nella forma generale si ha:

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Utilizzando il profilo di velocità assegnato, si ha:

$$\tau_w = \mu \frac{U}{\delta}$$

Dalla definizione di strato limite si ha:

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy + \int_{\delta}^{\infty} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy = \int_0^{\delta} \frac{y}{\delta} \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right) dy = \frac{\delta}{6}$$

Sostituendo quest' ultima espressione nell'equazione che fornisce gli sforzi di taglio alla parete, si ha:

$$\tau_w = \rho u^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho \frac{u^2}{6} \frac{d\theta}{dx}$$

Tale espressione va uguagliata alla  $\tau_w = \mu \frac{U}{\delta}$  ottenendo un' equazione differenziale in  $\delta$ :

$$\mu \frac{U}{S} = \rho \frac{U^2}{6} \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \delta d\delta = \frac{6\mu}{\rho U} dx$$

Integrando tra  $x = 0$  (dove  $\delta = 0$ ) ed un generico  $x$  (dove  $\delta = \delta(x)$ ) si ha:

$$\frac{\delta(x)^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho U} x \Rightarrow \delta(x) = 3.46 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\tau_w = 0.289 U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}}$$

N.B. I risultati forniti da Blasius (con una procedura molto più complicata) sono:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad \text{e} \quad \tau_w = 0.332 U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}}$$

Si noti che i risultati sono in buon accordo.

### **Es. 10.3**

Un flusso stazionario si muove con velocità  $U=3\text{m/s}$  su di una lastra piana. Determinare approssimativamente in quale posizione  $x_{cr}$  e con quale spessore (geometrico)  $\delta(x_{cr})$  di strato limite, si ha la transizione da strato limite laminare a turbolento, nel caso di acqua a  $15^\circ\text{C}$ , aria in condizioni di atmosfera standard e glicerina a  $20^\circ\text{C}$ . Assumere che il Reynolds critico ( $Re_{x_{cr}}$ ) di transizione sia  $5 \times 10^5$  e che siano valide le formule di Blasius per lo strato limite (lastra piana).

<b>Fluido</b>	<b><math>\nu</math> (<math>\text{m}^2/\text{s}</math>)</b>	<b><math>x_{cr}</math> (m)</b>	<b><math>\delta(x_{cr})</math> (m)</b>
Aria	$1.5 \times 10^{-5}$		
Acqua	$1.12 \times 10^{-6}$		
Glicerina	$1.19 \times 10^{-3}$		

### **Soluzione Es. 10.3**

Dalla teoria di Blasius, si ha  $\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ , con il flusso che è laminare fino a  $x_{cr} = \frac{\nu Re_{cr}}{U}$

quindi:

$$\delta_{cr} = 5\sqrt{\frac{\nu x_{cr}}{U}}$$

Si ottiene, quindi:

<b>Fluido</b>	<b><math>\nu</math> (m<sup>2</sup>/s)</b>	<b><math>x_{cr}</math>(m)</b>	<b><math>\delta(x_{cr})</math> (m)</b>
Aria	$1.5 \times 10^{-5}$	0.186	$1.3 \times 10^{-3}$
Acqua	$1.12 \times 10^{-6}$	2.5	$1.7 \times 10^{-2}$
Glicerina	$1.19 \times 10^{-3}$	198	1.4

### **Es. 10.4**

Si consideri un flusso turbolento di un fluido incompressibile su di una lastra piana. Il profilo di velocità nello strato limite può essere approssimato nel modo seguente:

$$\frac{u(y)}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{per } 0 \leq y \leq \delta$$
$$u(y) = U \quad \text{per } y > \delta$$

(si noti che questo andamento è in buon accordo con i profili sperimentali anche se alla parete fornisce la condizione non fisica  $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{wall} = \infty$ ). Gli sforzi di taglio possono essere ottenuti dalla seguente relazione ottenuta sulla base di osservazioni sperimentali:

$$\tau_0 = 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}$$

Determinare gli spessori di strato limite ( $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ) e gli sforzi di taglio alla parete al variare della distanza  $x$ . Determinare anche il coefficiente di resistenza di attrito  $C_\tau$ .

### **Soluzione Es. 10.4**

L'equazione integrale della quantità di moto fornisce la relazione tra  $\tau_w$  e  $\delta_2$ :

$$\tau_w = \rho u^2 \frac{d\delta_2}{dx}.$$

Dalla definizione, si ha che lo spessore della quantità di moto è:

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dY$$

Che, per il profilo di velocità assegnato diventa:

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dY = \delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dY = \frac{7}{72} \delta$$

Ora, considerando l'assegnata distribuzione degli sforzi  $\tau$  si ottiene:

$$0.0225\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} = \left(\rho U^2 \frac{d\delta_2}{dx}\right) = \frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Ovvero la seguente equazione differenziale in  $\delta$ :

$$\delta^{1/4} \cdot d\delta = 0.231 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4} dx$$

che, integrata tra  $\delta = 0$  e  $x = 0$  (assumendo il profilo turbolento dal L-E ) fornisce:

$$\delta = 0.370 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} \cdot x^{4/5}$$

Ed in forma dimensionale:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.370}{\text{Re}_x^{1/5}}$$

Lo spessore di spostamento si ottiene dalla definizione:

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) dY = \delta \int_0^1 \left(1 - Y^{1/7}\right) dY$$

da cui:  $\delta_1 = \delta / 8$ .

Tenendo conto del risultato ottenuto per  $\delta$ , si ha:

$$\delta_1 = 0.0463 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} \cdot x^{4/5}$$

N.B. La dipendenza funzionale di  $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  da  $x$  è la stessa. Ciò che cambia sono le costanti di proporzionalità. Tipicamente  $\delta_2 < \delta_1 < \delta$ .

Tenendo conto dell'espressione di  $\delta$  e dell'assegnata distribuzione di  $\tau_w$ , si ottiene:

$$\tau_w = 0.0225\rho U^2 \left[ \frac{\nu}{U \cdot 0.370(u/U)^{1/5} x^{4/5}} \right]^{1/4}$$

Da cui:

$$\tau_w = 0.0298\rho \frac{U^2}{\text{Re}_x^{1/5}}$$

Quest' ultima quantità può essere integrata sulla superficie della lastra (  $A = l \cdot b =$  area della lastra):

$$D_f = \int_0^l b \cdot \tau_w dx = b \cdot 0.0288\rho U^2 \int_0^l \left( \frac{\nu}{Ux} \right)^{1/5} dx$$

Da cui:

$$D_f = 0.0360\rho U^2 \frac{A}{\text{Re}_l^{1/5}}$$

Per quanto riguarda il coefficiente di attrito si ha:

$$c_f = \frac{D_f}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \frac{0.072}{\text{Re}_l^{1/5}}$$

N.B. Fin dal principio della soluzione dell'esercizio si è assunto lo S.L. turbolento dal L.E., cioè si è considerato  $\delta = 0$  in  $x = 0$ . In realtà bisognerebbe considerare la transizione dello S.L. da laminare a turbolento.

In particolare occorre definire un  $x$  critico:

$$x_{cr} = \frac{\nu \text{Re}_{cr}}{U} = \frac{1.5 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^5}{15} = 0.5m$$

E, quindi, un nuovo valore  $x^* = x - x_{cr}$  da sostituire nei calcoli fatti alla  $x$ .