

Capitolo 6

Analisi del segnale

6.1 Premessa

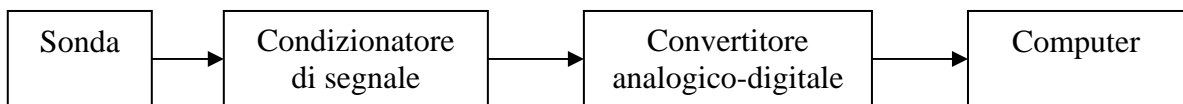
I dati sperimentali che rappresentano un fenomeno fisico sono spesso chiamati *segnali* (per esempio: fluttuazioni della temperatura in una stanza in funzione del tempo, variazioni di pressione in un punto di un campo acustico, etc.).

Nelle analisi sperimentali si utilizzano quindi strumenti di misura per ottenere, dal fenomeno fisico esaminato, delle informazioni interpretabili attraverso opportune analisi e manipolazioni.

In generale, è possibile distinguere i seguenti elementi caratterizzanti la *catena di misura* utilizzata nelle sperimentazioni:

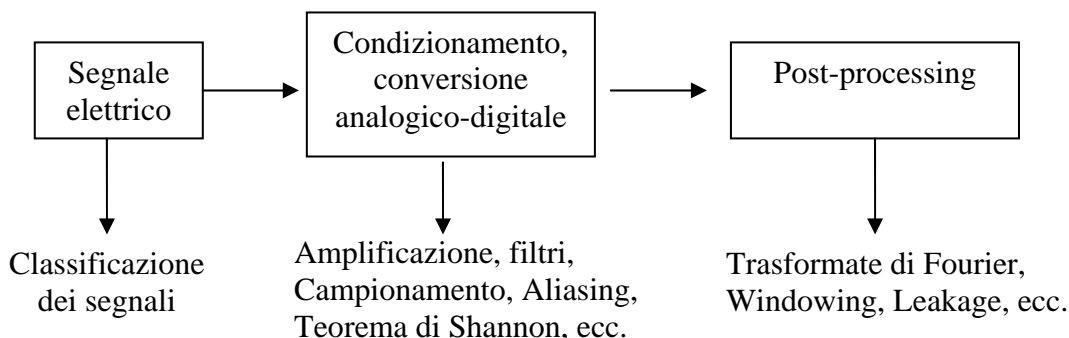
- *Sorgente*: il fenomeno fisico da studiare
- *Trasduttore di sorgente*: dal supporto fisico al segnale elettrico
- *Canale elettrico*: organi o apparati attraverso i quali il segnale viaggia o viene temporaneamente immagazzinato (Buffers, cavi BNC, ecc..)
- *Trasduttore di destinazione*: organo che trasforma il supporto elettrico per renderlo adatto alla ricezione da parte del destinatario (convertitore analogico-digitale)
- *Destinatario*: ente a cui è diretto il “messaggio” proveniente dalla sorgente (un computer o workstation)

Più specificatamente, alcuni degli apparati principali utilizzati nella catena di misura sono:



- *Sonda*: è un trasduttore che trasforma la quantità fisica in un segnale elettrico (in genere Volts)
- *Condizionatore di segnale*: sistema utilizzato per amplificazione, offset, filtraggio ecc. dei segnali elettrici provenienti dal trasduttore
- *Convertitore A/D*: trasforma il segnale da analogico (continuo) a digitale (discreto)
- *Computer*: utilizzato per l’immagazzinamento dei dati e per il *post-processing*

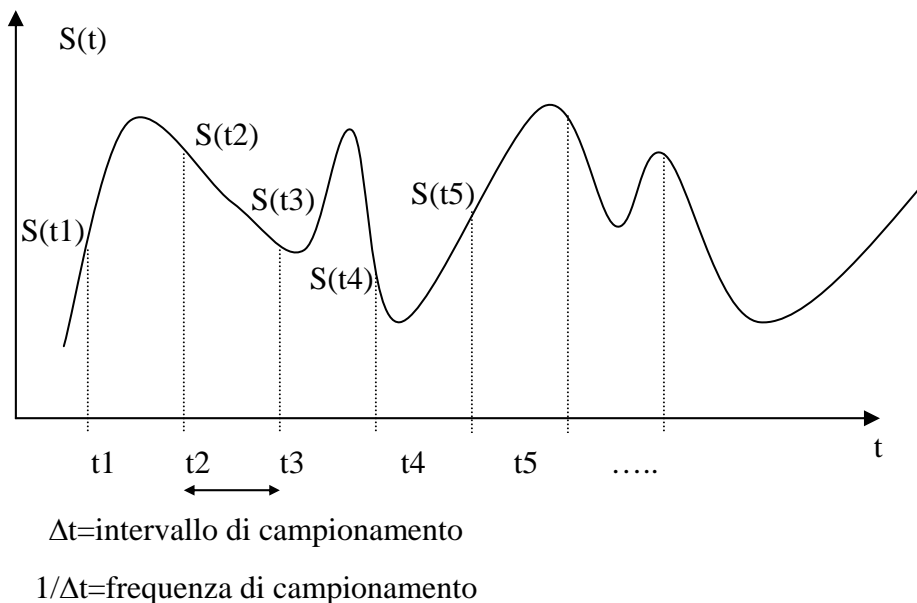
Gli aspetti principali che saranno esaminati in questo capitolo sono legati a quanto sopra specificato, ed in particolare si analizzeranno i seguenti argomenti:



6.2 I segnali

6.2.1 Generalità

I dati misurati in uscita dal traduttore, che rappresentano quindi i fenomeni fisici, vengono generalmente chiamati *segnali*. Come già sottolineato, il fenomeno fisico da studiare viene “tradotto” dal trasduttore in un equivalente elettrico (in genere una tensione) e, per esempio con un oscilloscopio, può essere rappresentato in funzione del tempo. In questi casi si ha a che fare con segnali detti *analogici* o *continui*. I segnali ottenuti in questa forma, non possono però essere immagazzinati in un computer e diventa quindi necessaria una procedura di *digitalizzazione* o *discretizzazione*, solitamente detta *campionamento*. Il segnale in questo caso è rappresentato da una sequenza di numeri (campioni) che corrispondono ai valori del segnale stesso negli istanti di tempo selezionati attraverso la frequenza o tempo di campionamento. Ad esempio, per un segnale $S(t)$ (notiamo che non sempre la variabile indipendente è il tempo t), si ha:



Per cui il segnale campionato sarà esprimibile come la seguente tabella:

tempo	Segnale
t_1	$S(t_1)$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$S(t_2)$
$t_3 = t_1 + 2\Delta t$	$S(t_3)$
$t_4 = t_1 + 3\Delta t$	$S(t_4)$
$t_5 = t_1 + 4\Delta t$	$S(t_5)$
....

Cioè, in generale, il segnale campionato sarà:

$S(r \Delta t)$, con $r = 0, 1, 2, 3, \dots$

L'*analisi dei segnali* (signal-processing) consiste nell'insieme di metodologie e procedure utilizzate per estrarre dal segnale analogico, tutte le informazioni necessarie all'interpretazione fisica del problema studiato. I passaggi principali nell'analisi di un segnale, sono i seguenti:

- 1) *Acquisizione*: riguarda la strumentazione utilizzata e si riferisce principalmente alla procedura di trasformazione del segnale da analogico a digitale
- 2) *Analisi*: manipolazione del segnale per l'estrazione delle informazioni di interesse
- 3) *Interpretazione*: collegamento delle informazioni ottenute alla realtà del fenomeno fisico studiato

6.2.2 Classificazione dei segnali

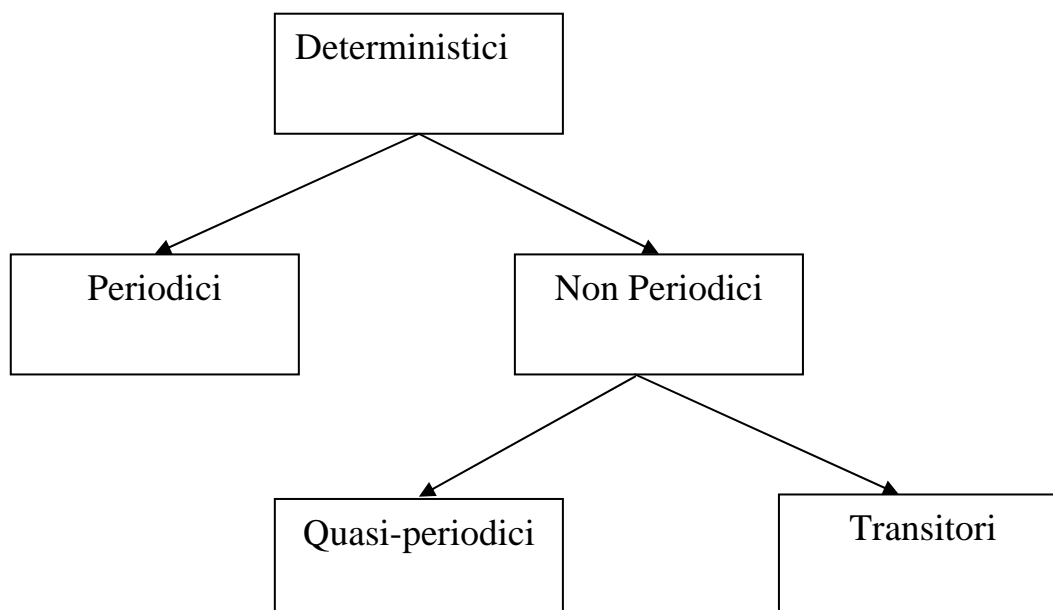
I segnali possono essere classificati nel seguente modo:

- **Segnali deterministici**: l'andamento del segnale può essere predetto esattamente in qualsiasi istante di tempo sulla base delle sole condizioni iniziali (per esempio è il caso di un oscillatore massa-molla).
- **Segnali non deterministici** (o **random**, o **casuali**, o **stocastici**): l'andamento del segnale non può essere predetto con certezza. Questo vuol dire che il valore di $S(t)$ in un istante t^* generico, non può essere predetto nemmeno conoscendo tutta la storia temporale precedente $S(t < t^*)$.

A volte ci sono dei fenomeni che producono segnali con un contributo sia deterministico che non-deterministico. Per lo studio dei segnali random è comunque necessario un approccio probabilistico allo scopo di determinare delle proprietà di carattere generale del segnale che abbiano valore in senso statistico (argomento trattato al Cap. 7).

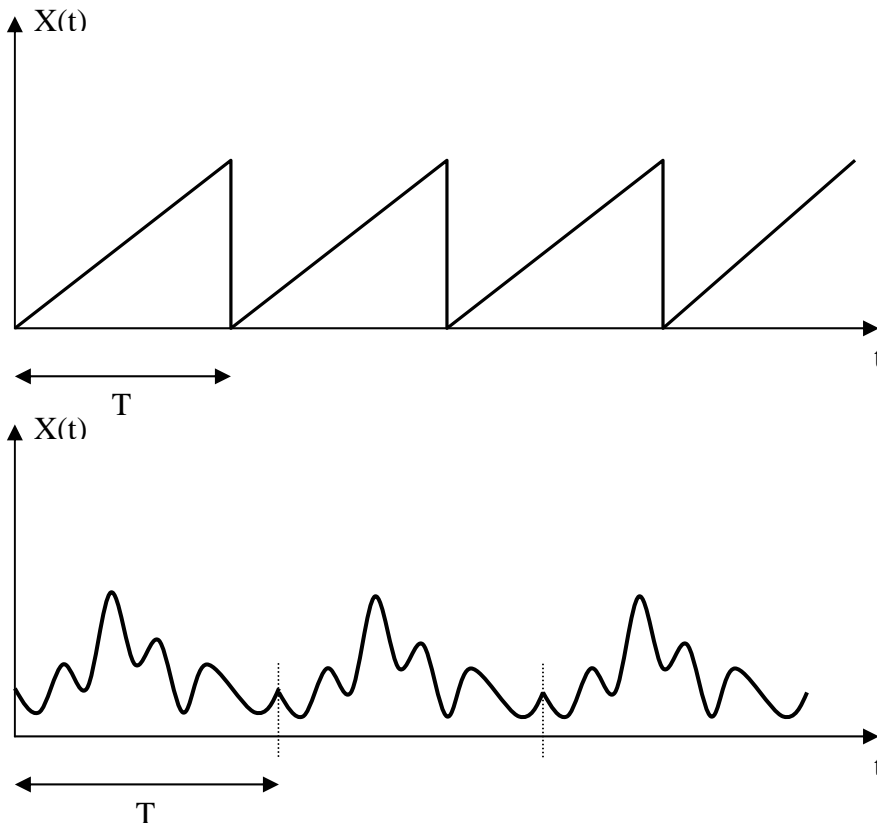
6.3 I segnali deterministici

I *segnali deterministici* si classificano nel modo seguente:



6.3.1 Segnali periodici

Sono delle funzioni la cui forma d'onda si ripete uguale a se stessa in intervalli di tempo regolari. Oltre ovviamente alle funzioni trigonometriche, i segnali periodici possono avere le forme più diverse, ad esempio:



In generale si ha quindi:

$$X(t) = X(t+nT) \text{ essendo } T \text{ il periodo e } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

Come si vedrà in seguito, i segnali periodici possono essere descritti da una somma, in genere infinita, di funzioni armoniche aventi frequenze diverse, il cui rapporto è sempre un numero razionale (Serie di Fourier).

6.3.2 Segnali quasi-periodici

Vengono definiti in questo modo i segnali che sono ottenibili anch'essi come somma di funzioni armoniche aventi frequenze diverse, ma in questo caso, però, il rapporto tra le frequenze delle singole armoniche è un numero irrazionale (se fosse razionale si otterrebbe un segnale periodico). Ad esempio:

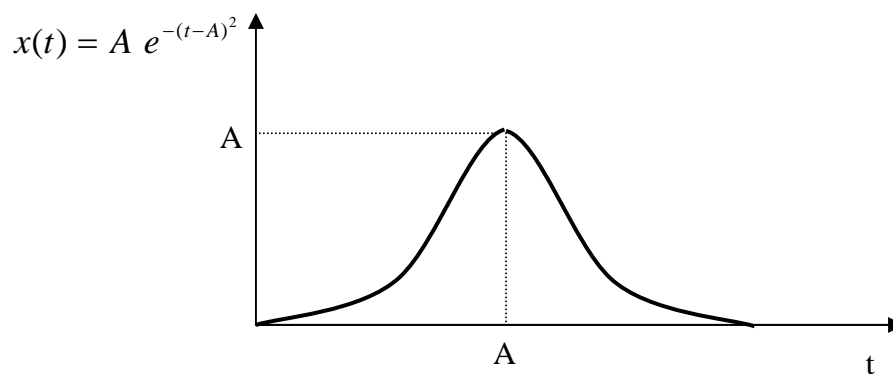
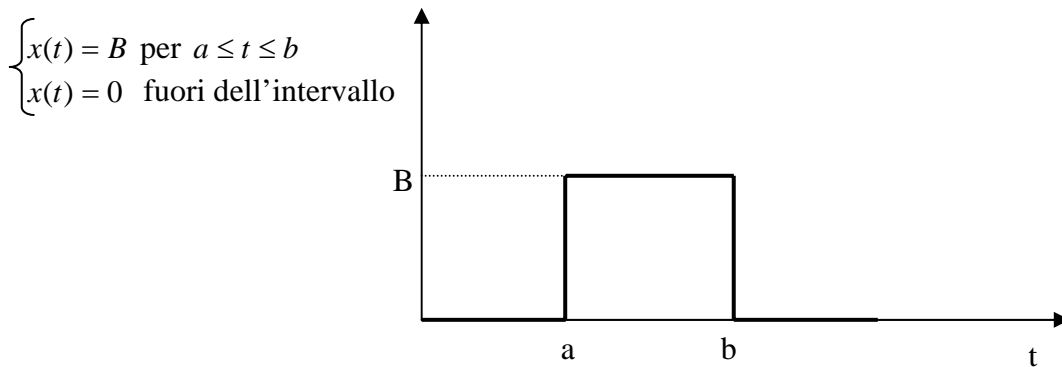
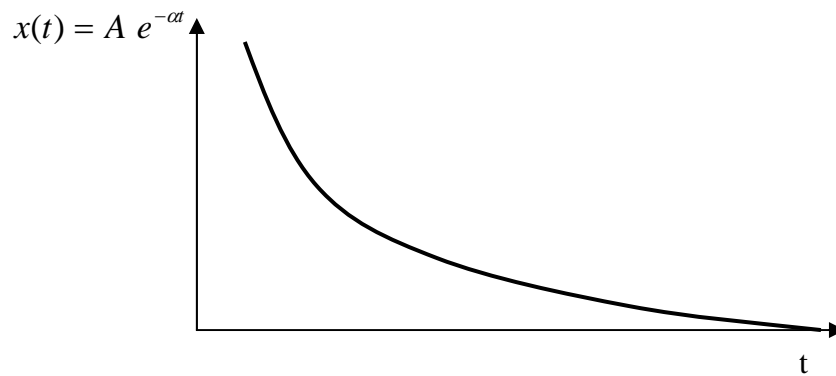
$$x(t) = X_1 \sin(2t + \theta_1) + X_2 \sin(\sqrt{50}t + \theta_2)$$

Ciò implica che la forma d'onda non si ripete mai identicamente.

Un esempio di segnale quasi-periodico è fornito dalla deflessione temporale di un punto di una trave incastrata-libera, soggetta a vibrazioni flessionali libere.

6.3.3 Segnali transitori

Anche questa categoria include segnali non-periodici ma la parola *transitori* sta ad indicare segnali che hanno una durata limitata nel tempo. Alcuni esempi sono i seguenti:



6.4 Serie di Fourier per segnali periodici

Nella trattazione che segue si suppongono noti i concetti di base relativi agli sviluppi in serie ed in particolare alle serie di Fourier. Molti aspetti della presente trattazione vanno quindi interpretati come dei richiami (trattazioni estese possono trovarsi in Brigham, 1988 e Bracewell, 1985).

6.4.1 Generalità

E' noto che ogni funzione può essere approssimata, in generale, dalla somma di certe funzioni elementari $u_n(t)$, con $n=1,2,\dots$, tramite opportuni coefficienti c_n , cioè:

$$x(t) \cong \sum_{n=0} c_n u_n(t)$$

c_n sono, per il momento, coefficienti incogniti.

Si noti che si è stati deliberatamente vaghi sull'estensione della sommatoria, per evitare una discussione sulla convergenza, che sarà sviluppata più avanti.

Affinchè l'espressione precedente sia una "buona" approssimazione di $x(t)$, è opportuno che le funzioni $u_n(t)$ formino un insieme completo ed ortogonale. La completezza implica che l'aggiunta di ogni nuovo termine della serie porta ad una approssimazione migliore della funzione originaria. L'ortogonalità implica invece che, per due funzioni diverse, si abbia, in un opportuno intervallo T (per esempio il periodo):

$$\int_0^T u_n(t) u_m(t) dt = 0 \quad m \neq n$$

Ciò premesso, per determinare i coefficienti incogniti c_n , si può applicare un metodo ai minimi quadrati. Si può cioè calcolare l'errore:

$$e(t) = x(t) - \sum_{n=0} c_n u_n(t)$$

e minimizzare il funzionale:

$$J = \int_0^T e^2(t) dt$$

Poiché le $u_n(t)$ sono note, J è solo funzione di c_1, c_2, \dots . Per minimizzare J si devono imporre le condizioni di derivata nulla:

$$\frac{\partial J}{\partial c_m} = 0 \quad m = 1, 2, \dots$$

da cui ricavare i coefficienti incogniti:

$$c_m = \frac{1}{\int_0^T u_m^2(t) dt} \int_0^T x(t) u_m(t) dt$$

Come caso particolare, si può dimostrare che la serie di funzioni

$$\frac{1}{T}, \frac{\sin \omega_0 t}{T/2}, \frac{\cos \omega_0 t}{T/2}, \frac{\sin 2\omega_0 t}{T/2}, \frac{\cos 2\omega_0 t}{T/2}, \dots \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

è un insieme completo ed ortogonale nell'intervallo $0 \leq t \leq T$.

Pertanto un segnale periodico di periodo T , continuo in tale intervallo, può essere approssimato uniformemente dalla serie di Fourier e rappresentato come somma di onde tipo *seni* e *coseni*, di ampiezza e fase appropriata.

Per una singola onda sinusoidale si ha:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) = X \sin(2\pi f t + \varphi)$$

essendo:

X : ampiezza

ω : frequenza in radianti/sec (anche detta pulsazione)

f : frequenza in Hertz (1/s)

φ : fase (angolo rispetto all'origine espresso in radianti)

Il periodo del segnale è quindi: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ espresso in secondi.

Per quanto riguarda la fase, si ha che se $\varphi > 0$ lo spostamento rispetto allo zero è verso destra (ritardo) altrimenti, per $\varphi < 0$, lo spostamento è verso sinistra (anticipo) (ovviamente per $\varphi = \pi/2$ l'onda sinusoidale diventa un coseno).

Consideriamo ora un segnale periodico generico di periodo T_p : $x(t) = x(t + n \cdot T_p)$

A parte poche eccezioni, un segnale di questo tipo può essere rappresentato nella forma seguente, detta, come ben noto, **serie di Fourier** :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right) \right] \quad (6.1)$$

dove:

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right) dt$$

che si ottengono se nell'espressione di c_m precedentemente vista mettiamo al posto della generica espressione di $u_n(t)$ i *seni* e *coseni*.

Si definisce come *frequenza fondamentale*, il valore che si ottiene ponendo $n=1$, ossia

$$f_1 = \frac{1}{T_p} \quad \text{oppure} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_p}.$$

E' chiamata *fondamentale* perché tutte le altre frequenze $\left(f_n = \frac{n}{T_p} = n f_1\right)$ sono multiple di essa.

Il valore $\frac{a_0}{2}$ rappresenta invece il valore medio del segnale (spesso detto "D.C. level") essendo definito come:

$$a_0 = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) dt$$

La serie di Fourier può essere anche scritta nella seguente forma più compatta:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [M_n \cos(2\pi n f_n t - \phi_n)]$$

essendo, per la frequenza generica $f_n = n f_1$,

$$M_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (\text{ampiezza})$$

e

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (\text{fase})$$

Le precedenti rappresentazioni sono molto utili perché consentono di esprimere un segnale periodico complicato quanto si vuole in una somma di segnali più semplici (le funzioni trigonometriche).

6.4.2 Alcune considerazioni sulla convergenza

Si è precedentemente assunto che una data funzione periodica può essere rappresentata dalla serie di Fourier. Ora è necessario stabilire le condizioni per le quali la rappresentazione in serie di Fourier è possibile: tali condizioni sono note con il nome di **condizioni di Dirichlet**. Presentiamo ora alcune considerazioni sulla convergenza della serie di Fourier senza dare i dettagli (ved. ad es. Kolmogorov e Tomin, 1980).

Le **condizioni di Dirichlet** per l'esistenza della serie sono le seguenti:

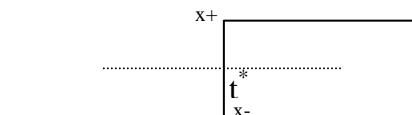
- La funzione periodica deve essere continua o avere un numero di discontinuità finite nel periodo (insieme di misura nulla);
- La funzione deve contenere un numero finito di massimi e minimi nel periodo;
- La funzione deve essere assolutamente sommabile nel periodo, cioè:

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty$$

Ciò premesso, se la funzione periodica è continua, lo sviluppo in serie di Fourier converge uniformemente (cioè puntualmente) alla funzione originaria.

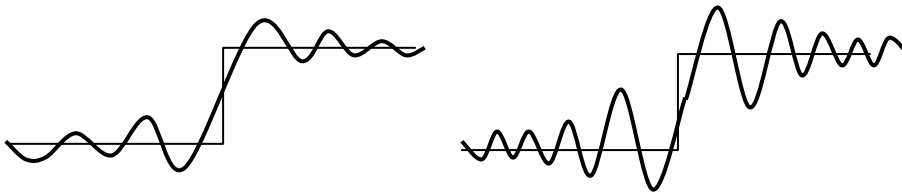
La condizione sufficiente per la convergenza prevede che il segnale $x(t)$ possa non essere una funzione continua. Infatti, se una funzione periodica di periodo T_p è continua a tratti nell'intervallo $-\frac{T_p}{2} < t < \frac{T_p}{2}$ e possiede le derivate destra e sinistra in ogni punto (discontinuità di prima specie) in tale intervallo, allora la serie di Fourier converge, ma solo in media, cioè la somma è la media dei limiti destro e sinistro della funzione nel punto di discontinuità.

In altre parole, la somma della serie (per $n \rightarrow \infty$) all'istante t^* è proprio $x(t^*)$ solo se la funzione è continua in t^* . Se la continuità non è verificata ma esistono le derivate destre e sinistre, la somma della serie è data dalla media tra il limite sinistro ed il limite destro della $x(t)$ in t^* . Ad esempio per una funzione a gradino:



Il valore della somma della serie nella discontinuità è $\frac{1}{2}(x^- + x^+)$.

Nelle immediata vicinanza di una discontinuità c'è però un notevole errore, indipendentemente dal numero di termini usato nello sviluppo. Man mano che si incrementano i termini della serie nell'intorno della discontinuità, lo sviluppo in serie presenta oscillazioni sempre più ad alta frequenza, che si avvicinano al punto di discontinuità, senza che la curva approssimata riesca comunque a descrivere la discontinuità; quindi, anche aumentando il numero dei termini nella sommatoria, non si riesce ad ottenere un miglioramento della convergenza:



Serie con N1 valori

Serie con N2 > N1 valori

Questa situazione viene comunemente chiamata “*fenomeno di Gibbs*”.

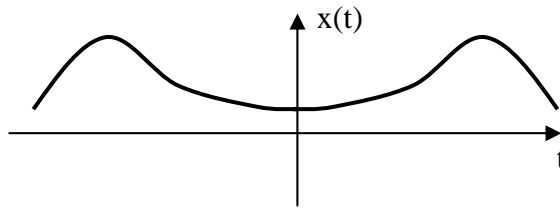
6.4.3 Differenziazione ed integrazione della serie di Fourier

Se la funzione $x(t)$ soddisfa le condizioni di Dirichlet, allora la serie di Fourier può essere integrata termine a termine. Si noti che l'operazione di integrazione tende ad “allisciare” le discontinuità per cui la serie relativa all'integrale converge più rapidamente.

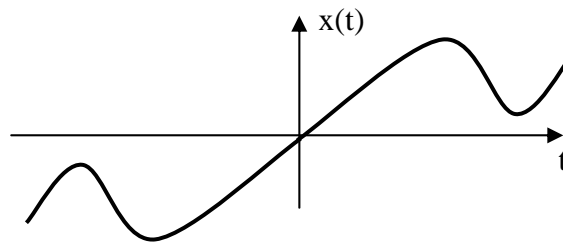
Questo ragionamento però, a causa delle possibili discontinuità, non vale per la differenziazione. La condizione necessaria per la differenziabilità è che la derivata di $x(t)$ soddisfi a sua volta le condizioni di Dirichlet. Solo in questo caso la serie di Fourier della derivata si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier della funzione di partenza.

6.4.4 Alcune proprietà per forme d'onda particolari

- $x(t)$ è una funzione pari (come ad esempio la funzione *coseno*) se $x(-t) = x(t)$



- $x(t)$ è una funzione dispari (come ad esempio la funzione *seno*) se $-x(-t) = x(t)$



- Ricordiamo che qualsiasi funzione può essere espressa come somma di una funzione pari più una dispari:

$$x(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] + \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

essendo

$$\frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \Rightarrow \text{pari}$$

$$\frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \Rightarrow \text{dispari}$$

- Se $x(t)$ è una funzione pari (e periodica) allora

$$\int_{-a}^a x(t) dt = 2 \int_0^a x(t) dt$$

ed il suo sviluppo in serie di Fourier (nella forma 6.1) sarà formato da soli coseni (i coefficienti b_n saranno nulli).

Analogamente, se $x(t)$ è una funzione dispari (e periodica) allora

$$\int_{-a}^a x(t) dt = 0$$

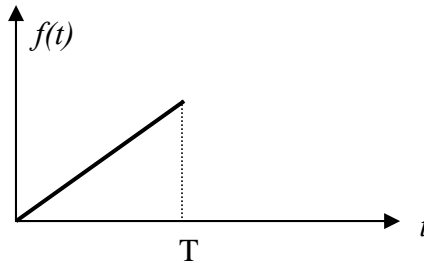
ed il suo sviluppo in serie di Fourier (nella forma 6.1) sarà formato da soli seni (i coefficienti a_n saranno nulli).

- Si ricordi inoltre che, ovviamente, se $x(t)$ e $y(t)$ sono due funzioni tali che:

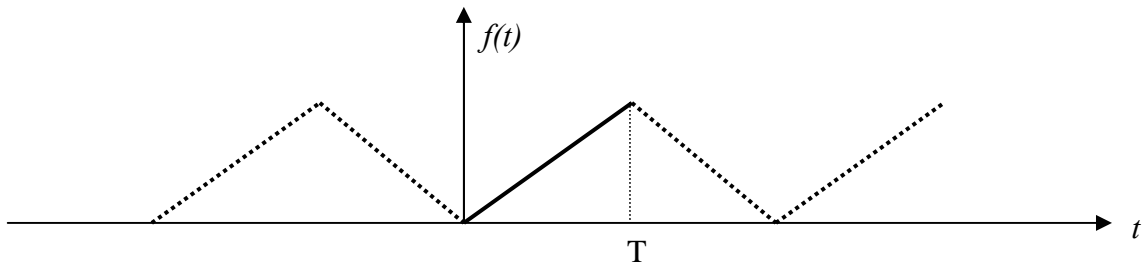
- | | | |
|--|---|------------------------|
| a) $x(t)$ è dispari e $y(t)$ è dispari | → | $x(t)y(t)$ è pari ; |
| b) $x(t)$ è dispari e $y(t)$ è pari | → | $x(t)y(t)$ è dispari ; |
| c) $x(t)$ è pari e $y(t)$ è dispari | → | $x(t)y(t)$ è dispari ; |
| d) $x(t)$ è pari e $y(t)$ è pari | → | $x(t)y(t)$ è pari. |

6.4.5 Espansione in serie di Fourier di una funzione non periodica definita su di un intervallo finito

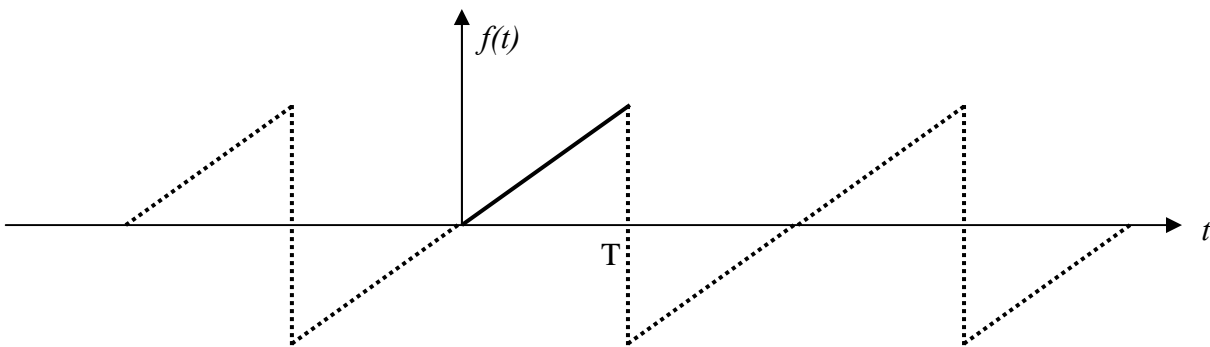
Consideriamo una funzione $f(t)$ qualsiasi definita su un intervallo finito $(0, T)$. L'espansione in serie di Fourier può essere effettuata "periodicizzando" la $f(t)$ ovvero costruendo una funzione periodica con periodo T o $2T$ o, in generale, con periodo $\alpha > T$, semplicemente ripetendo la $f(t)$ ad intervalli regolari nel tempo. Ad esempio, data la forma seguente di $f(t)$:



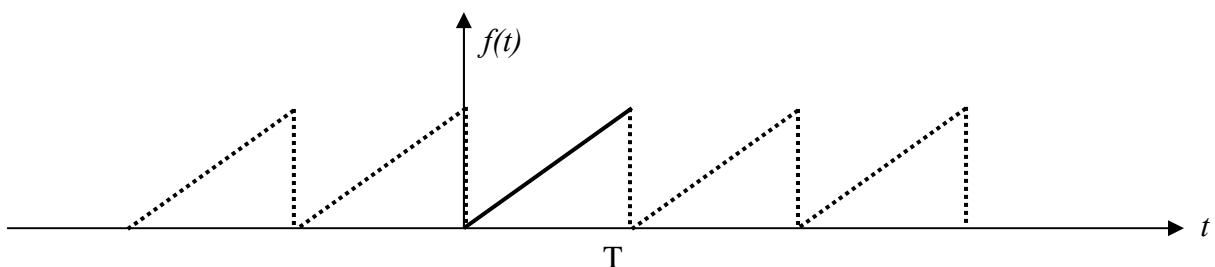
Si può effettuare un'espansione "pari" costruendo una funzione periodica con periodo $2T$ il cui sviluppo in serie conterrà soli coseni:



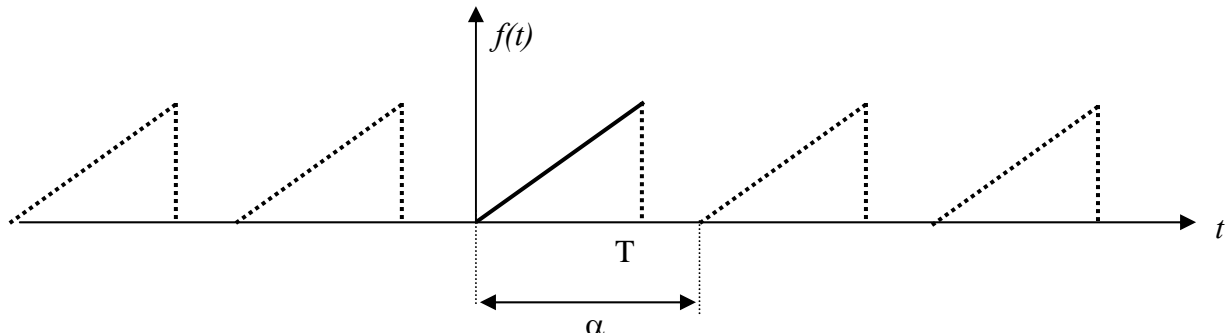
Si può effettuare un'espansione "dispari" costruendo una funzione periodica con periodo $2T$ il cui sviluppo in serie conterrà soli seni:



Si può effettuare un'espansione generica costruendo una funzione periodica con periodo T il cui sviluppo in serie conterrà seni e coseni:



Infine, si può effettuare un'espansione generica costruendo una funzione periodica con periodo $\alpha > T$ il cui sviluppo in serie conterrà seni e coseni:



A questo punto è possibile applicare lo sviluppo in serie di Fourier a queste funzioni estese e considerare la serie rappresentativa della funzione solo nell'intervallo di definizione. Estensioni pari sono rappresentate da serie di soli coseni, estensioni dispari da serie di soli seni.

Esempio 1: Si trovi la serie di Fourier per la funzione:
 $x(t) = t$ dove $-\pi < t < \pi$ con $x(t+2\pi) = x(t)$

Risposta:
$$x(t) \cong 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$$

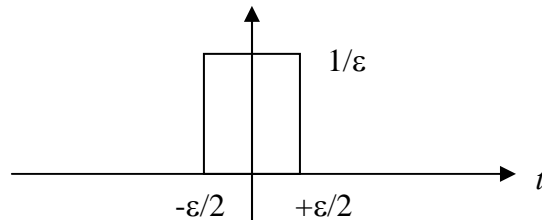
6.4.6 La funzione Delta di Dirac

La funzione Delta di Dirac, $\delta(t)$ fa parte delle cosiddette funzioni generalizzate (per dettagli ved. anche Dispense di Fluidodinamica I, G. Guj). E' particolarmente utile nell'analisi del segnale perché permette di differenziare funzioni con discontinuità ed è importante per molte applicazioni della serie di Fourier. Essa è definita nel modo seguente:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{se } t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty & \text{se } t = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Questa funzione può essere interpretata come un impulso molto stretto centrato in $t=0$:

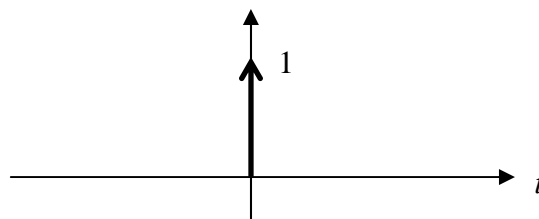
$$\begin{cases} \delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} & \text{per } -\frac{\varepsilon}{2} < t < +\frac{\varepsilon}{2} \\ \delta_\varepsilon(t) = 0 & \text{per } t \notin \left[-\frac{\varepsilon}{2}; +\frac{\varepsilon}{2}\right] \end{cases}$$



per cui si ha:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$$

cioè si ha un cosiddetto "impulso unitario".
 Facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene il Delta di Dirac:

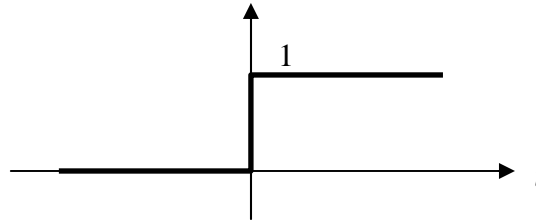
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$$



La rappresentiamo cioè come una freccia la cui lunghezza (unitaria) rappresenta l'intensità dell'impulso.

Utilizzando la funzione a gradino (o funzione di Heaviside) $u(t)$, la funzione $\delta(t)$ può anche essere interpretata in termini di tale funzione a gradino unitario, definita nel modo seguente:

$$\begin{cases} u(t) = 1 & \text{se } t > 0 \\ u(t) = 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



Si può scrivere che:

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left[u\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) - u\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]$$

e poiché il δ di Dirac è naturalmente il limite di $\delta_\varepsilon(t)$ per ε che tende a zero, si ottiene il seguente importante risultato:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) - u\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = \frac{du(t)}{dt}.$$

Notiamo che la funzione Delta di Dirac sopra definita è localizzata in $t=0$. Se essa è localizzata in $t=a \neq 0$, si scrive $\delta(t-a)$. La proprietà ottenuta è molto importante perché consente di rappresentare tramite il Delta di Dirac le derivate delle discontinuità (di prima specie).

Una proprietà fondamentale che verrà usata in seguito, è la seguente:

$$\forall f(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$$

Altre proprietà di $\delta(t)$ sono le seguenti:

$$I) \quad \delta(t) = \delta(-t)$$

$$II) \quad \delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t)$$

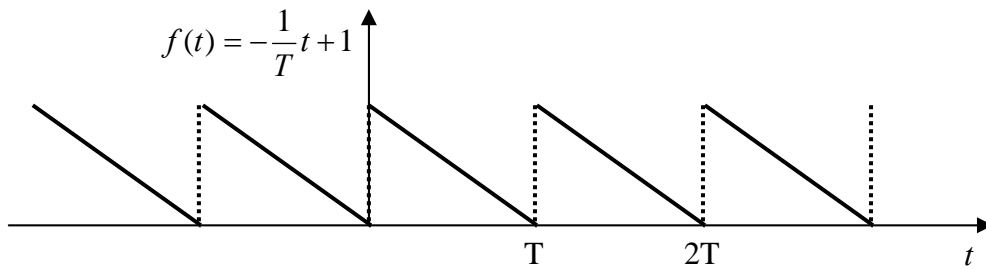
$$III) \quad \int e^{\pm jat} dt = 2\pi\delta(t) \quad \text{e} \quad \int e^{\pm 2\pi jat} dt = \delta(t)$$

6.4.7 Serie di Fourier e Delta di Dirac

Avendo visto che anche le funzioni che presentano discontinuità possono essere derivate se si introduce la funzione di Dirac, considereremo ora la serie di Fourier delle derivate di funzioni periodiche non continue.

Per ottenere l'espansione in serie di Fourier di $\delta(t)$ occorre sfruttare la proprietà descritta in 6.4.3 che permette di differenziare funzioni discontinue tenendo conto anche di quanto detto al par. 6.4.5 a proposito di funzioni non periodiche ma limitate nel tempo.

Sia $f(t)$ la funzione periodica rappresentata nella seguente figura.



Nell'intervallo $[0, T]$ si ha $f(t) = -\frac{1}{T}t + 1$.

La rappresentazione in serie di Fourier di questa funzione è:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

Mentre la derivata di $f(t)$ è data da:

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

la derivata della serie di Fourier si ottiene:

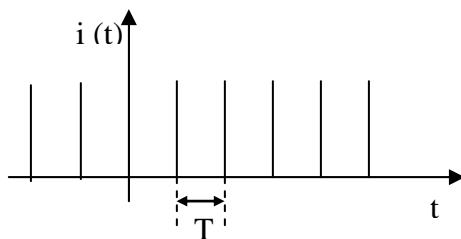
$$\frac{d}{dt} f_F(t) = \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right).$$

Uguagliando le due espressioni si ha:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

cioè un treno (periodico) di impulsi può essere rappresentato da una serie di Fourier i cui coefficienti sono costanti ($2/T$) per tutte le frequenze.

Il treno periodico di impulsi sarà usato più avanti parlando del campionamento dei segnali.



6.4.8 Forma complessa dello sviluppo in serie di Fourier

Lo sviluppo in serie può anche essere espresso in termini di funzioni esponenziali complesse. Le funzioni trigonometriche sono legate alle funzioni esponenziali dalle:

$$\cos n \frac{2\pi t}{T} = \frac{e^{\frac{jn2\pi t}{T}} + e^{-\frac{jn2\pi t}{T}}}{2} ; \quad \sin n \frac{2\pi t}{T} = \frac{e^{\frac{jn2\pi t}{T}} - e^{-\frac{jn2\pi t}{T}}}{2j}$$

Pertanto:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_n \left[a_n \left(e^{\frac{jn2\pi t}{T}} + e^{-\frac{jn2\pi t}{T}} \right) - jb_n \left(e^{\frac{jn2\pi t}{T}} - e^{-\frac{jn2\pi t}{T}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_n \left[(a_n - jb_n) \left(e^{\frac{jn2\pi t}{T}} \right) - (a_n + jb_n) \left(e^{-\frac{jn2\pi t}{T}} \right) \right]$$

Ponendo $c_0 = \frac{1}{2}a_0$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad \text{che è la complessa coniugata di } c_n$$

si può scrivere: $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{jn2\pi t}{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-\frac{jn2\pi t}{T}}$

e cioè: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{jn2\pi t}{T}}$

essendo:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(\cos n \frac{2\pi t}{T} - j \sin n \frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{jn2\pi t}{T}} dt$$

Questa è la forma complessa (esponenziale) della serie di Fourier. Per una funzione di periodo T si può quindi scrivere:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

oppure:

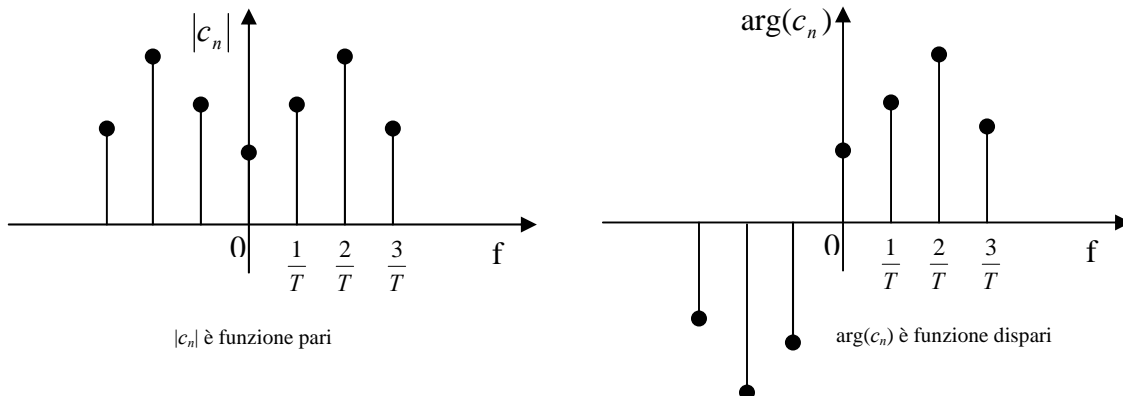
$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{jn2\pi t}{T}}}$$

6.5 Spettri

Riferendoci alla notazione complessa dello sviluppo in serie di Fourier:

- una rappresentazione grafica di $|c_n|$ in funzione della frequenza (o di ω) è chiamata lo **Spettro di Ampiezza** della funzione periodica;
- una rappresentazione di $\arg(c_n)$ in funzione della frequenza è chiamata lo **Spettro di Fase**.

Entrambe queste rappresentazioni sono discrete alle frequenze $f = \frac{n}{T}$ (figure seguenti):



6.5.4 Teorema di Parseval: Spettro di Potenza

Si supponga che $x(t)$ sia una tensione: la potenza istantanea dissipata attraverso una resistenza unitaria è $x^2(t)$ e la potenza media è: $\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$.

Poiché:
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{jn2\pi t}{T}}$$

e:
$$x^2(t) = x(t)x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 n t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^* e^{-j\omega_0 m t}$$

la potenza media è:
$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \sum_n \sum_m c_n c_m^* \int_0^T e^{j\omega_0 t(n-m)} dt$$

che per le proprietà di ortogonalità dell'integrando, fornisce:

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2} \quad \text{Teorema di Parseval}$$

Nella quale la quantità $|c_n|^2$ è detto **spettro di potenza** (che è una grandezza reale e pari).

Questa equazione ha un'interpretazione fisica: essa indica che la potenza media del segnale $x(t)$ può essere interpretata come la somma di potenze associate alle singole componenti in frequenza.

6.6 Integrali di Fourier

Estendiamo l'analisi di Fourier a fenomeni non periodici. Il cambiamento maggiore nella rappresentazione consiste nel passaggio da una somma discreta di termini a una somma continua (integrale).

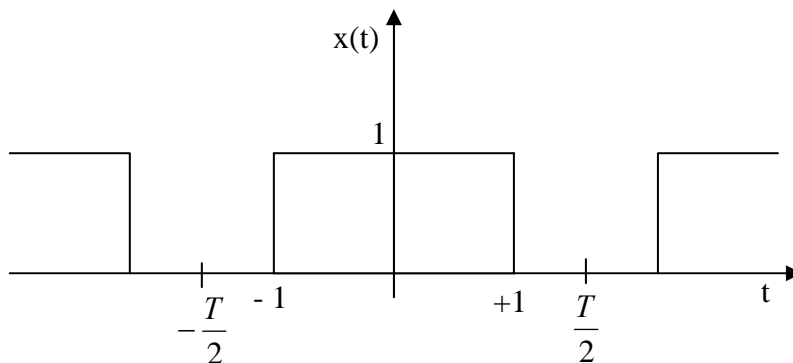
Partiamo con lo sviluppo in serie di Fourier per un segnale periodico:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

con:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

e si supponga che $x(t)$ abbia la forma della seguente figura, cioè:



$$\begin{cases} x(t)=0 & \text{per } -\frac{T}{2} < t < -1 \\ x(t)=1 & \text{per } -1 < t < 1 \quad \left(\frac{T}{2} > 1\right) \\ x(t)=0 & \text{per } 1 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Ora si consenta a T di diventare sempre più grande. In queste condizioni la nostra funzione diventa una funzione a gradino intorno a $t=0$.

Cosa succede allo sviluppo in serie di Fourier?

La frequenza fondamentale $f_1=1/T$ diventa sempre più piccola e tutte le altre frequenze ($f_n=nf_1$) si addensano sull'asse delle frequenze. La distanza fra queste frequenze è $\Delta f=1/T$.

Per $T \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta f \rightarrow 0$, così che:

$$c_n = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ (\Delta f \rightarrow 0)}} \Delta f \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ (\Delta f \rightarrow 0)}} \Delta f \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

e, se l'integrale è finito, $c_n \rightarrow 0$.

Per evitare questo risultato, si formi il rapporto:
$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \left(\frac{c_n}{\Delta f} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Ipotizzando che il limite esista, si scrive: $X(f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega_n t} dt$

Poiché $\Delta f \rightarrow 0$, la rappresentazione in frequenza diventa un continuo (e scriveremo f oppure ω al posto di f_n o ω_n) e $X(f)$ è ora una densità di ampiezza.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt}$$

Con queste posizioni lo sviluppo in serie di Fourier per un segnale periodico diventa:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f_n) \Delta f e^{j2\pi f_n t}$$

cioè

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df}$$

Riassumendo, la coppia di trasformate di Fourier è:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt}$$

o, alternativamente:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

Per generalizzare il discorso fin qui fatto, conviene considerare alcune proprietà della funzione δ in termini di trasformate di Fourier.

Si possono dimostrare i seguenti risultati:

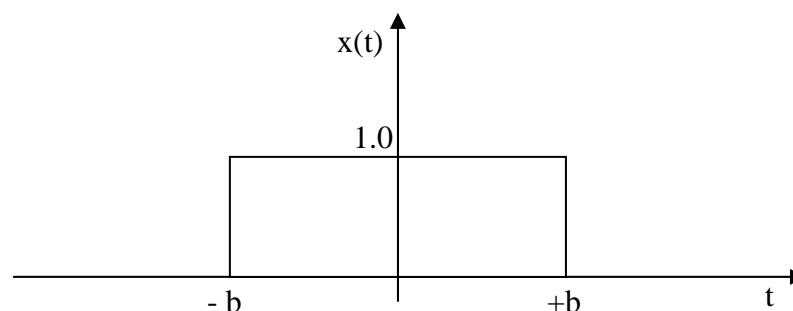
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j2\pi a t} dt = \delta(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j a t} dt = 2\pi \delta(a)$$

Cioè la trasformata di Fourier di una costante dà il Delta di Dirac.

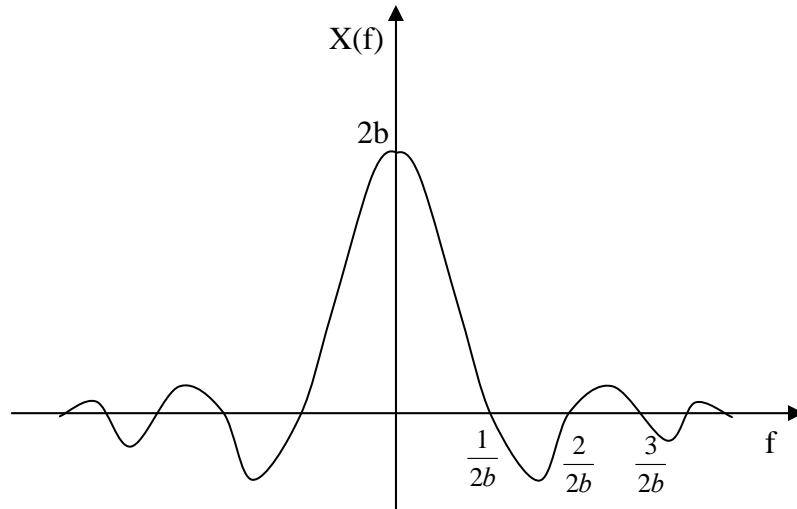
Giustificazione delle due equazioni precedenti:

Si supponga che $x(t)$ sia (vedi figura seguente):



Si può dimostrare che:
$$X(f) = \frac{2b \sin(2\pi b f)}{2\pi b f}$$

cioè $X(f)$ ha la forma della seguente figura.



Gli zeri di $X(f)$ si hanno in $f = \frac{n}{2b}$.

Facendo aumentare b , $x(t)$ si estende nel tempo e $X(f)$ diventa via via più stretto e più alto. Quando $b \rightarrow \infty$, $x(t)$ è costante e $X(f)$ è un “picco” nell’origine. Inoltre si ha che:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \Rightarrow \quad x(0) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df$$

e allora possiamo scrivere:
$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{2b \sin(2\pi b f)}{2\pi b f} = \delta(f)$$

e pertanto:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{-j2\pi f t} dt = \delta(f) \quad \text{c.v.d.}$$

La proprietà precedente dimostra che se $x(t)$ è “largo (o lungo) nel tempo”, $X(f)$ è “stretto in frequenza” e viceversa.

La condizione sufficiente per l’esistenza di un integrale di Fourier è, come nel caso della serie di Fourier, data dalle condizioni di Dirichlet. Occorre cioè:

- che la funzione $x(t)$ sia continua o presenti un numero di discontinuità finite tra $-\infty$ e $+\infty$;
- che la funzione $x(t)$ presenti, in tutto il campo, un numero finito di massimi e minimi;
- che la funzione sia assolutamente sommabile nell’intervallo $-\infty, +\infty$ cioè: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$

E’ comunque vero che si possono trasformare funzioni che non soddisfano la precedente relazione usando le funzioni δ .

Esempio 2: Si consideri la funzione: $x(t) = \cos(2\pi p t)$

Questa è una funzione che non soddisfa la condizione di sommabilità.

Ovviamente si può scrivere:
$$\cos 2\pi p t = \frac{e^{j2\pi p t} + e^{-j2\pi p t}}{2}$$

E, applicando le proprietà del delta di Dirac precedentemente viste, si ha immediatamente:

$$X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - p) + \delta(f + p)]$$

Esempio 3: Si consideri la funzione di Heaviside $u(t)$.

Introducendo la funzione δ , si può dimostrare che la trasformata di Fourier è:

$$F[u(t)] = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

Esempio 4: Trasformata di Fourier di una funzione periodica.

Se $x(t)$ è periodica di periodo T , cioè:
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n t}{T}}$$

Si può dimostrare che la trasformata di Fourier può essere scritta:

$$F[x(t)] = X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

6.7 Densità spettrali di ampiezza e fase

Abbiamo prima detto che $X(f)$ è una densità di ampiezza (complessa). Ovviamente $|X(f)|df$ rappresenta il contributo dei componenti in frequenza nella banda Δf intorno alla frequenza f . Poiché $X(f)$ è complessa, essa si può scrivere:

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi(f)}$$

$|X(f)|$ è la densità spettrale del modulo e $\phi(f)$ la densità spettrale di fase.

6.8 Densità spettrali di energia

Se $x(t)$ è la differenza di potenziale attraverso una resistenza unitaria, l'energia totale dissipata nella resistenza è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

Essa può essere espressa nel dominio delle frequenze mediante la trasformata di Fourier e vale la seguente relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad \text{Teorema di Parseval}$$

Si noti che qui usiamo l'energia, mentre precedentemente (per lo sviluppo in serie i Fourier) abbiamo usato la potenza.

La quantità $|X(f)|^2$ è una **densità spettrale di energia** in quanto deve essere moltiplicata per df per fornire l'energia.

Si usa l'energia (invece della potenza) in quanto la potenza media è: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt$

e se $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$ è finito, la potenza media è nulla.

I segnali che soddisfano tale proprietà sono detti segnali di energia.

6.9 Proprietà della trasformata di Fourier

Si ponga $F\{x(t)\} = X(f)$

$$a) F\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

$$b) F\{x(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

$$c) F\{x(t) e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f - f_0)$$

$$d) F\{\dot{x}(t)\} = j2\pi f X(f)$$

e) Trasformata di Fourier della convoluzione di due funzioni.

Se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad Y(f) = H(f) X(f)$$

Infatti:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) e^{-j2\pi f v} dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(f) = H(f) X(f)$$

Cioè la convoluzione nel tempo equivale al prodotto delle trasformate.

f) Trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni.

$$\text{Sia } y(t) = s(t)w(t) \quad \Rightarrow \quad F\{s(t)w(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(g)W(f - g)dg$$

Infatti:

$$F\{s(t)w(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) w(t) e^{-j2\pi f t} dt = \iint_{-\infty}^{+\infty} S(f_1)W(f_2) e^{-j2\pi t(f - f_1 - f_2)} dt df_1 df_2 \Rightarrow$$

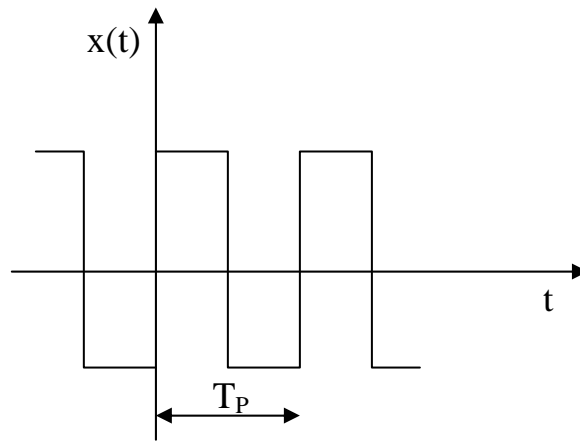
$$F\{s(t)w(t)\} = \int \int_{-\infty}^{+\infty} S(f_1)W(f_2) \delta(f - f_1 - f_2) df_1 df_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f_1)W(f - f_1) df_1$$

Cioè il prodotto nel tempo equivale alla convoluzione delle trasformate.

Da notare che le proprietà (b) e (c) (di traslazione nel tempo ed in frequenza) sono importanti nella definizione del problema dell'Aliasing che vedremo successivamente.

6.10 Considerazioni computazionali

Quando si calcolano i coefficienti di Fourier di un segnale periodico che noi misuriamo, è molto importante identificare correttamente il periodo del segnale.



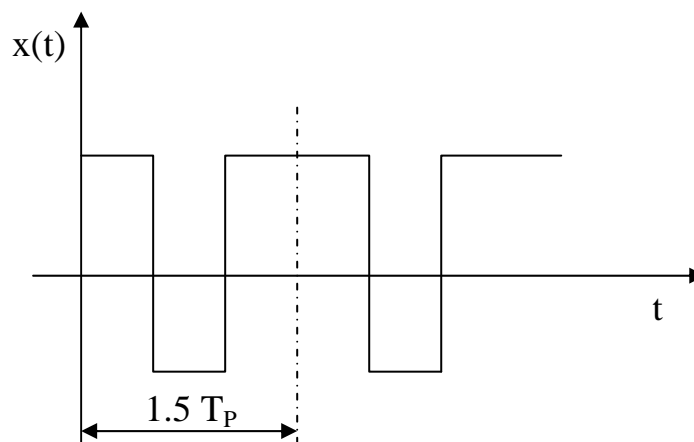
Se si acquisisce esattamente un periodo, si possono calcolare correttamente i coefficienti dalla formula:

$$c_k = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) e^{-\frac{j2\pi kt}{T_P}} dt$$

Se si acquisiscono nT_P secondi di dati (n intero) cioè n periodi, si può usare la formula:

$$c_k = \frac{1}{nT_P} \int_0^{nT_P} x(t) e^{-\frac{j2\pi kt}{nT_P}} dt$$

ottenendo i coefficienti di Fourier spazati a frequenza $1/nT_P$ lungo l'asse delle frequenze; come si può facilmente verificare i coefficienti, in questo caso (n intero), sono ancora corretti perché i valori dei coefficienti in corrispondenza di $n \neq 1$ risultano comunque nulli. Se invece si acquisiscono per esempio $1.5 T_P$ secondi, implicitamente si assume che il segnale sia come quello sotto riportato nella seguente figura.



Chiaramente i coefficienti di Fourier cambiano (c'è, per esempio, un valore medio nullo) e i coefficienti sono spazati ogni $1/1.5T_P$ Hz.

Pertanto se il periodo non è noto, è necessario catturare un grande numero di periodi in modo che gli effetti terminali siano piccoli. Questo punto è molto importante perché i metodi computazionali per ottenere i coefficienti di Fourier richiedono di solito N punti, con $N = 2^M$ (potenza intera di 2). Ciò significa che di solito non si analizza un numero intero di periodi.

Esempio 5:

Si consideri l'onda quadra esposta nella seguente figura.

L'onda quadra ha periodo $T_p=1s$ ed i coefficienti di Fourier teorici sono:

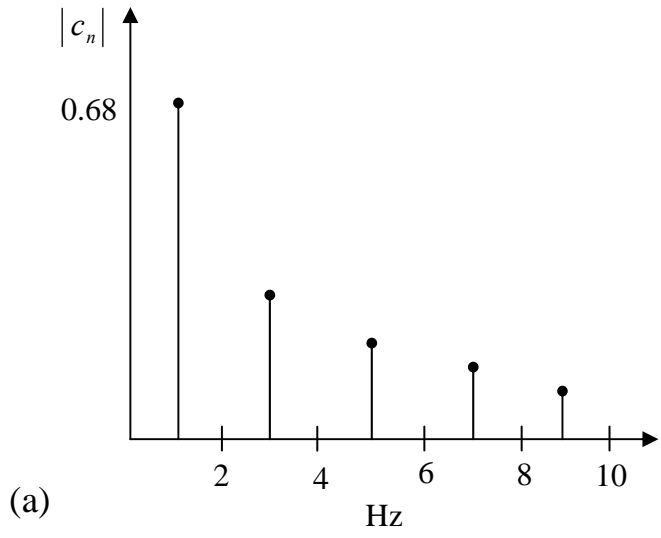
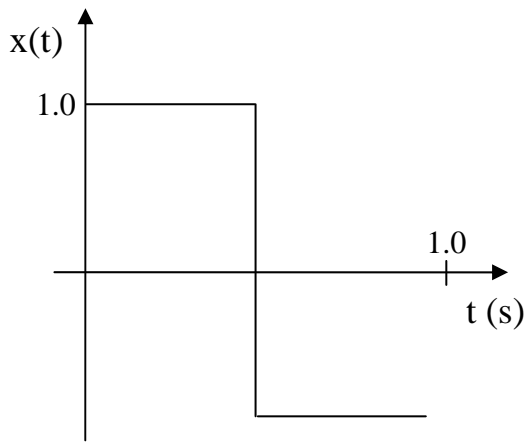
$$|c_n| \begin{cases} = \frac{2}{n\pi} & \text{per } n \text{ dispari} \\ = 0 & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

Le componenti in frequenza teoriche cadono ogni $1/T_p = 1Hz$. La figura (a) mostra $|c_n|$ fino a 10 Hz per un singolo periodo esatto. Le figure (b) e (c) mostrano invece le variazioni spettrali in Ampiezza quando si considera un numero non intero di periodi. In figura (b) sono usati 1.5 periodi mentre in figura (c) 3.5 periodi. Nelle figure (b) e (c) le ampiezze diminuiscono e ciò deriva dal fatto che c'è una densità crescente di componenti in frequenza nella decomposizione.

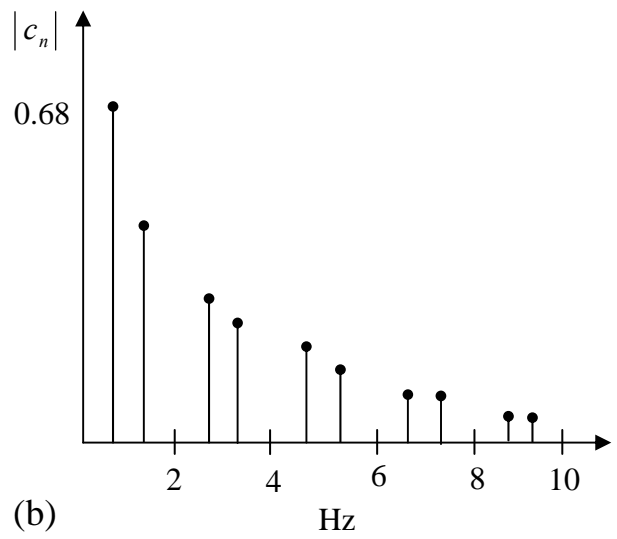
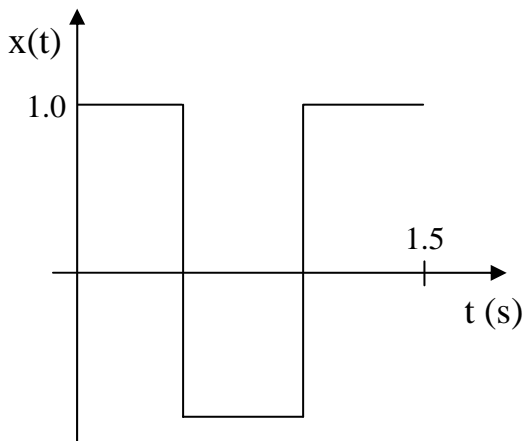
Ricordando l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{T} \int x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

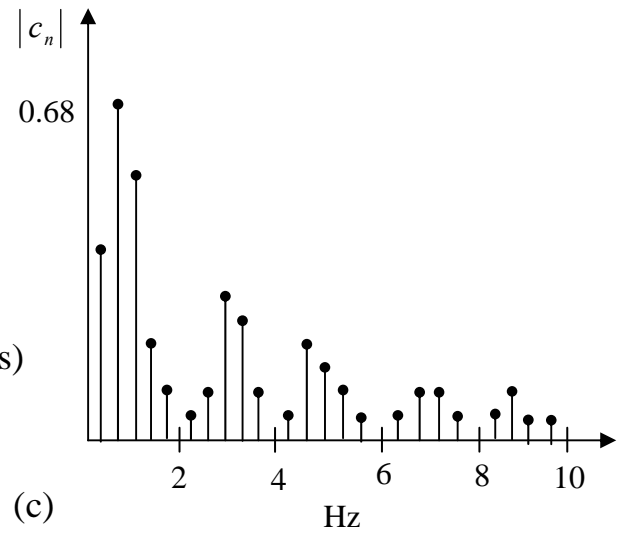
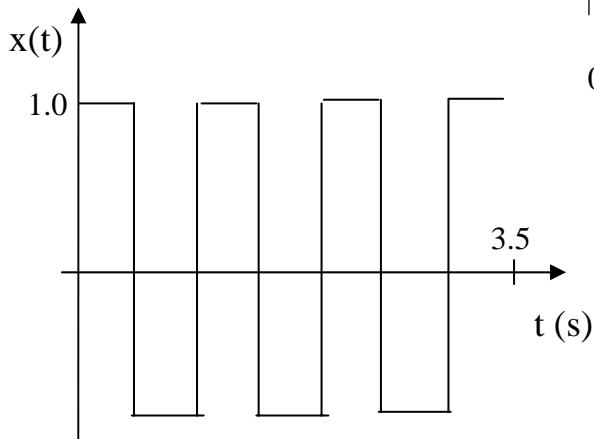
si ha che, per l'onda considerata, la potenza media è sempre unitaria, indipendentemente da T . Conseguentemente se c'è una densità crescente di componenti in frequenza, la loro ampiezza chiaramente cambia in modo che la loro somma resti unitaria.



(a)



(b)



(c)

6.11 Trasformata di Fourier discreta

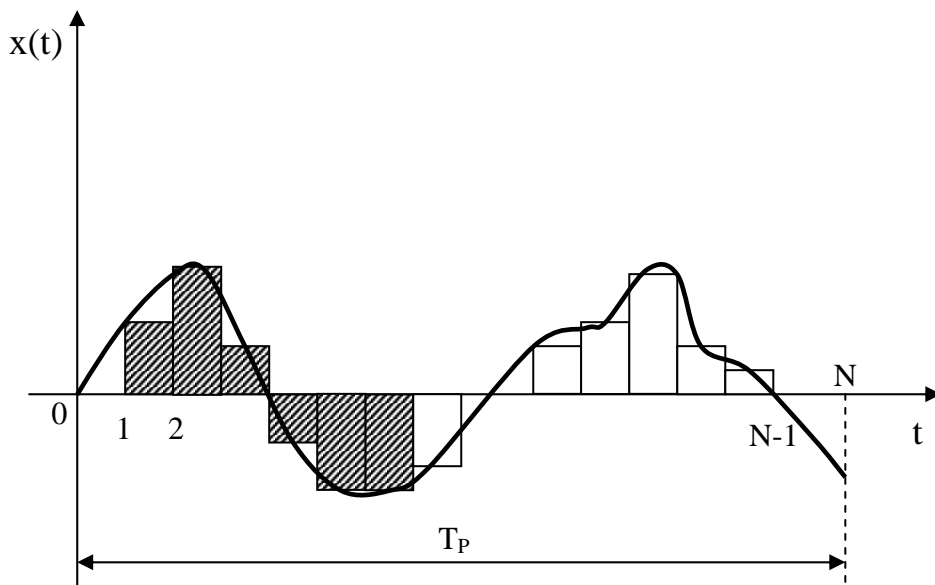
Vogliamo ora calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

$$c_k = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) e^{-\frac{j2\pi kt}{T_P}} dt$$

mediante tecniche digitali.

Si supponga che il segnale $x(t)$ sia discretizzato in N punti (come nella seguente figura) tale che si possa scrivere:

$$x(n\Delta) \quad n=0,1,\dots,N-1$$



Ogni punto dista dall'altro di una quantità Δ . Un'approssimazione logica dell'integrale è:

$$c_k \cong \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta) e^{-\frac{j2\pi kn\Delta}{N\Delta}} \Delta = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} = \frac{X_k}{N}$$

La quantità X_k viene chiamata **Trasformata di Fourier Discreta (DFT)**.

Si noti che X_k è periodica, di periodo rN , cioè $X_k = X_{k+rN}$. Infatti:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

Sostituendo k con $k+rN$ (dove r è un intero), si ha:

$$X_{k+rN} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(k+rN)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \underbrace{e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nrN}}_{=1}$$

perciò $X_k = X_{k+rN}$.

Conseguentemente non può essere $c_k = \frac{X_k}{N}$ su tutto il campo di valori di n , ma, se si assume Δ sufficientemente piccolo, allora è $c_k = \frac{X_k}{N}$, almeno per qualche campo utile di valori di k ($< N$).

La relazione DFT:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (x_n \equiv x(n\Delta))$$

ha la sua relazione inversa (IDFT):

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

Per dimostrare quest'ultima relazione si moltiplichino entrambi i membri della DFT per il fattore $e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)sk}$ e si sommi su k (s un intero compreso nell'intervallo $0 \leq s \leq N-1$); si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)sk} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(s-n)k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(s-n)k}$$

Si ponga $m=s-n$ (intero): se $m=0$, la seconda sommatoria vale N ; se $m \neq 0$, la seconda sommatoria vale 0. Pertanto:

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)sk} = Nx_s \Rightarrow x_s = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)sk}$$

Si noti che nelle espressioni precedenti N è assolutamente arbitrario. Per l'applicazione, però della "**Fast Fourier Transform**" (**FFT**), un efficiente e veloce algoritmo di DFT, N è scelto come potenza di 2, cioè $N=2^M$ con M intero.

Esercizio: Si verifichi che anche la IDFT è periodica, ossia $x_n = x_{n+rN}$.
Passiamo ora all'integrale di Fourier, che è:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Se $x(t)$ è discretizzato nei punti $t=n\Delta$, si può sperare di rappresentare l'integrale, per Δ sufficientemente piccolo, tramite la seguente espressione:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta) e^{-j2\pi f n\Delta} \Delta$$

Se poi $x(t)$ è diverso da zero su un tratto finito, si può scrivere:

$$X(f) = \Delta \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi f n\Delta}$$

In vista della precedente definizione di DFT, si potrebbe sperare che, per almeno "alcuni" valori, sia:

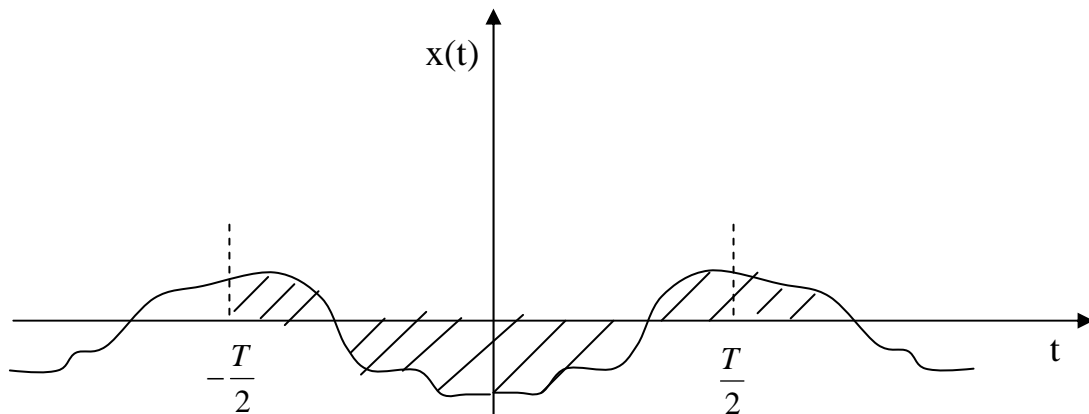
$$X(f) \Big|_{f=\frac{k}{N\Delta}} \cong \Delta \cdot X_k$$

Si vedrà dopo che, se Δ è abbastanza piccolo in modo da evitare il fenomeno di “aliasing”, ciò è vero.

6.12 Effetto del troncamento dei dati: "windowing"

Una delle cause di errore nelle misure è legata alla circostanza che si può usare solo una parte dei segnali.

Si supponga che $x(t)$ sia un segnale deterministico ma che esso sia noto solo per $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$.



Si può allora pensare che noi guardiamo ai dati come attraverso una “finestra” $\omega(t)$ tale che:

$$\begin{cases} w(t) = 1 & \text{per } |t| < \frac{T}{2} \\ w(t) = 0 & \text{per } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Cosicché noi vediamo la funzione $x_T(t) = \omega(t)x(t)$. Trasformando secondo Fourier si ottiene:

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(g)W(f-g)dg$$

dove:

$$W(f) = \frac{T \sin(\pi f T)}{\pi f T} \quad (\text{finestra spettrale})$$

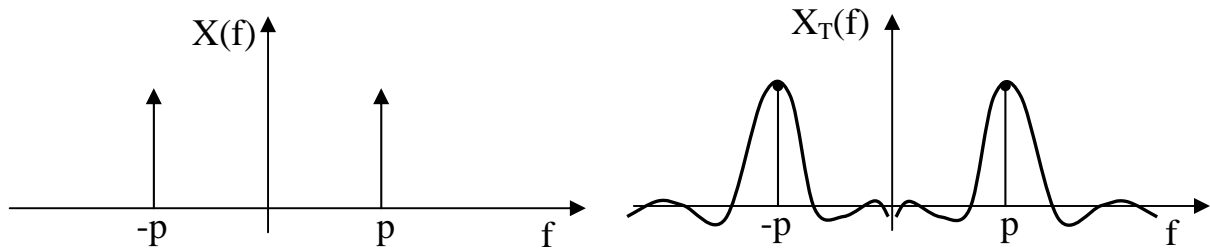
La finestra porta un **errore di troncamento** (“bias”), e l’integrale di convoluzione indica che la forma di $X(g)$ è distorta a meno di non riuscire a far tendere $W(f) \rightarrow \delta(f)$. Questa distorsione è chiamata “leakage” (*dispersione*) in quanto, data la forma di $W(f)$, le componenti di $X(g)$ per valori differenti da $g = f$ si disperdono attraverso i lobi laterali.

Esempio 6:

$$x(t) = \cos 2\pi p t \quad X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f+p) + \delta(f-p)]$$

Conseguentemente (vedi figura seguente):

$$X_T(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(g+p) + \delta(g-p)] W(f-g) dg = \frac{1}{2} [W(f+p) + W(f-g)]$$

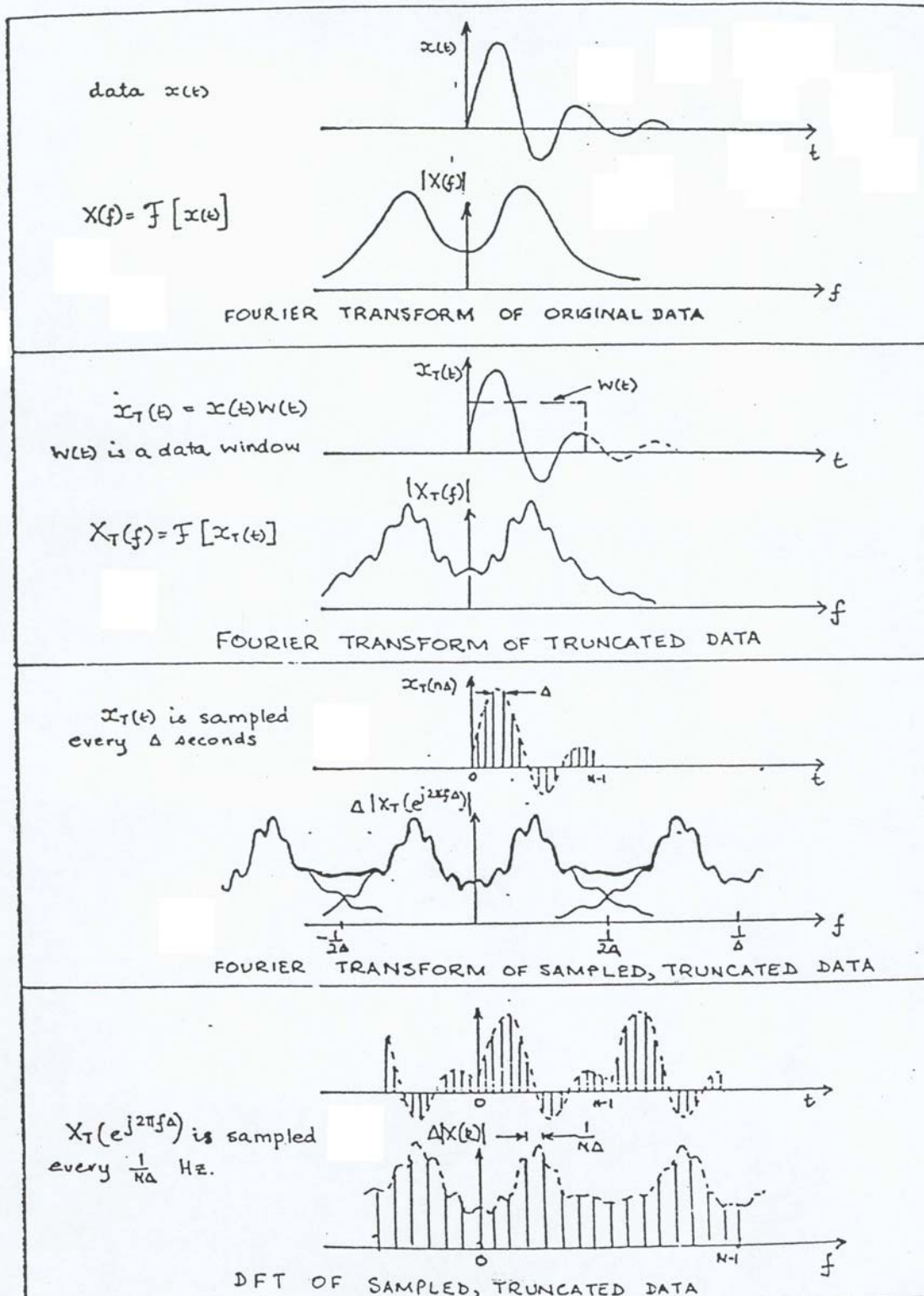


Si può facilmente verificare che questo tipo di finestra può oscurare frequenze vicine, e pertanto, per separare frequenze f_1, f_2 vicine è necessario usare periodi di troncamento (cioè lunghezze di segnale) $T > \frac{1}{(f_2 - f_1)}$ con finestre rettangolari.

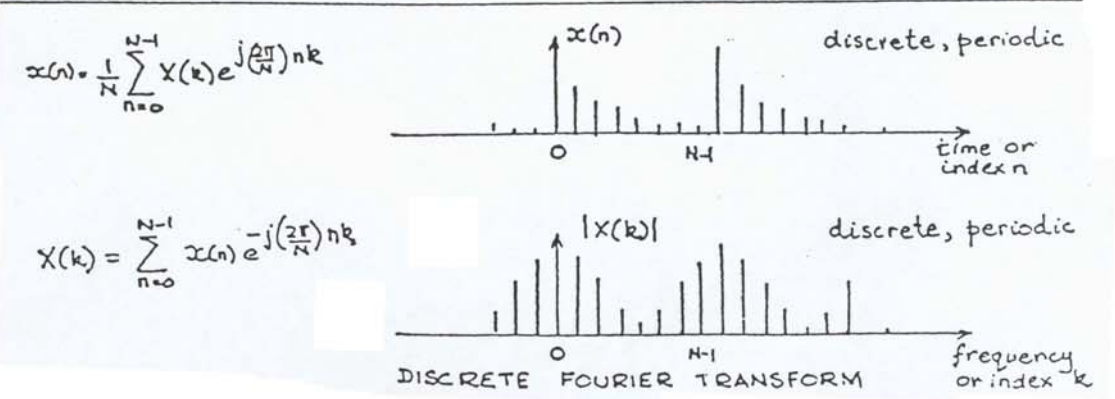
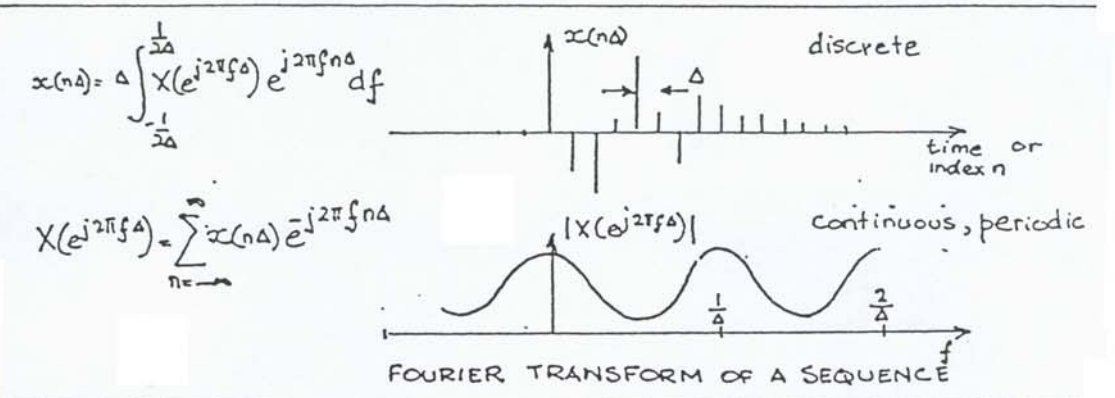
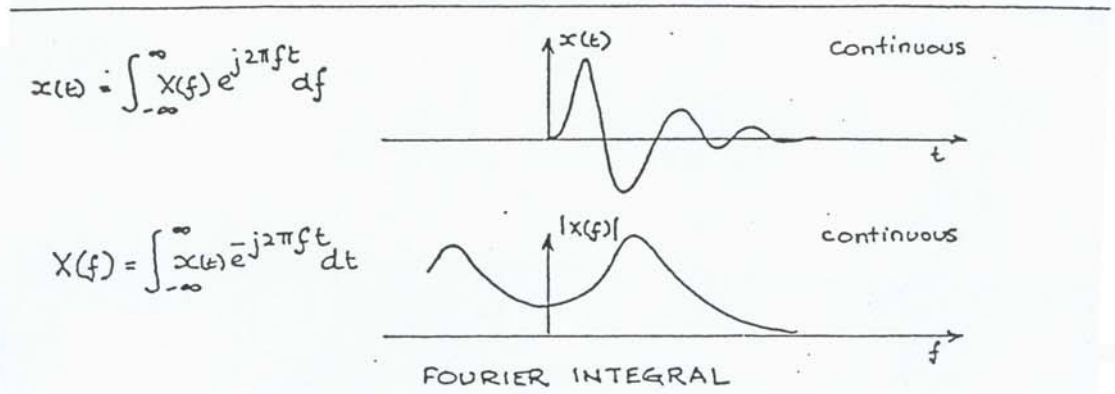
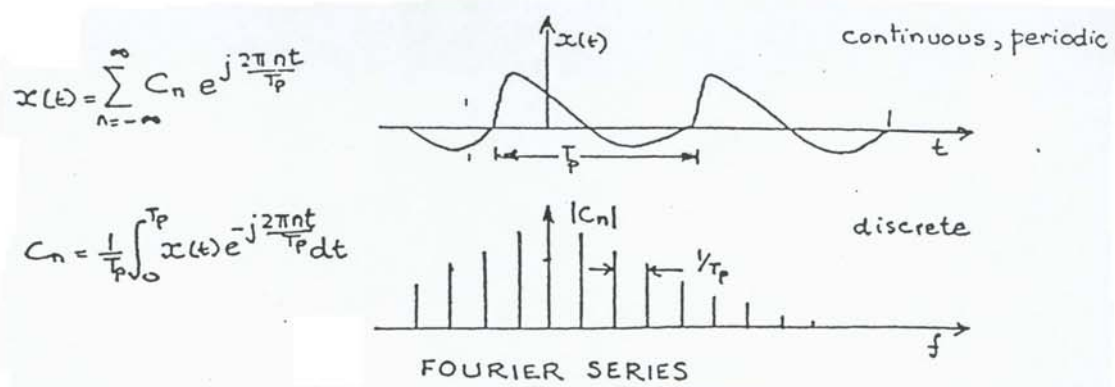
Senza scendere nel dettaglio, si ricorda che questi effetti negativi possono essere in parte migliorati con altri tipi di finestra (Hanning, Barlett, etc.) come sarà discusso più avanti.

Nelle figure seguenti vengono riportati degli schemi semplificativi che riassumono quanto visto fin'ora.

Trasformate di Fourier per segnali troncati e campionati:



Esempi di trasformate di Fourier per vari tipi di segnale (continuo/discreto):



6.13 Campionamento temporale: "Aliasing"

6.13.1 Trasformata di Fourier di un segnale campionato

Introdurremo il fenomeno dell'*aliasing* usando la cosiddetta "*modulazione di impulsi*".

Un segnale discretizzato ("campionato") viene di solito rappresentato come il prodotto di un segnale continuo con un treno di funzioni delta del tipo:

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta)$$

tale che si abbia il segnale campionato ("sampled"):

$$x(t)i(t) = x_s(t)$$

Poiché $i(t)$ è periodico con periodo Δ si può scrivere:

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{j2\pi nt}{\Delta}} \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} i(t) e^{-\frac{j2\pi nt}{\Delta}} dt = \frac{1}{\Delta}$$

Pertanto:

$$F\{x(t)i(t)\} = X(f) \cdot I(f)$$

essendo:

$$I(f) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{\Delta}\right)$$

Prima di dimostrare la precedente relazione, dimostriamo che la trasformata di Fourier di un segnale periodico, esprimibile come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{j2\pi nt}{T}}$$

è pari a

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Infatti si può scrivere:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{j2\pi nt}{T}} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(g) e^{j2\pi gt} dg$$

Moltiplicando entrambi i membri per $e^{-j2\pi ft}$ ed integrando tra $-\infty$ e $+\infty$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{j2\pi nt}{T}} e^{-j2\pi ft} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(g) e^{j2\pi gt} e^{-j2\pi ft} dt dg \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(g) e^{j2\pi(g-f)t} dt dg \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi t(g-f)} dt = \delta(g-f)$$

si ha:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi t\left(\frac{n}{T}-f\right)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(g)\delta(g-f)dg = X(f)$$

cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\left(f-\frac{n}{T}\right)t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f-\frac{n}{T}\right) = X(f) \quad \text{c.v.d}$$

A questo punto, avendo dimostrato la relazione precedente e ricordando che, per un treno di funzioni delta è:

$$c_n = \frac{1}{\Delta}$$

si ha:

$$I(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f-\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{n}{\Delta}\right)$$

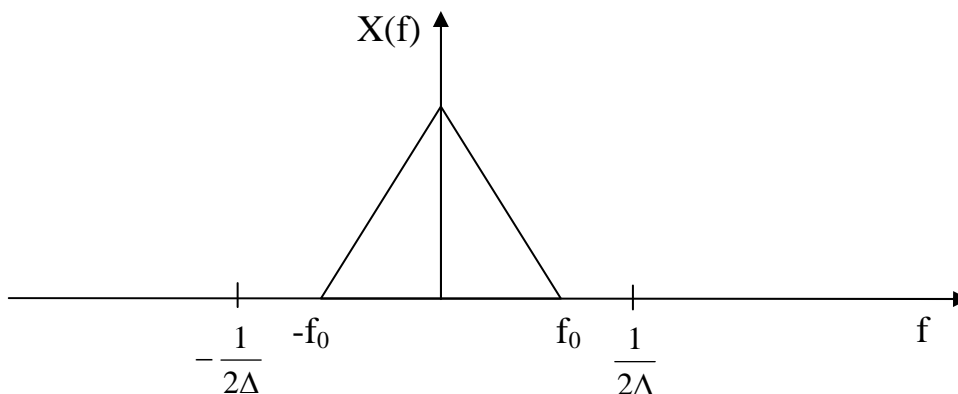
Ciò premesso si può scrivere:

$$F\{x(t)i(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(g-\frac{n}{\Delta}\right) X(f-g)dg = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{n}{\Delta}\right) = X_s(f)$$

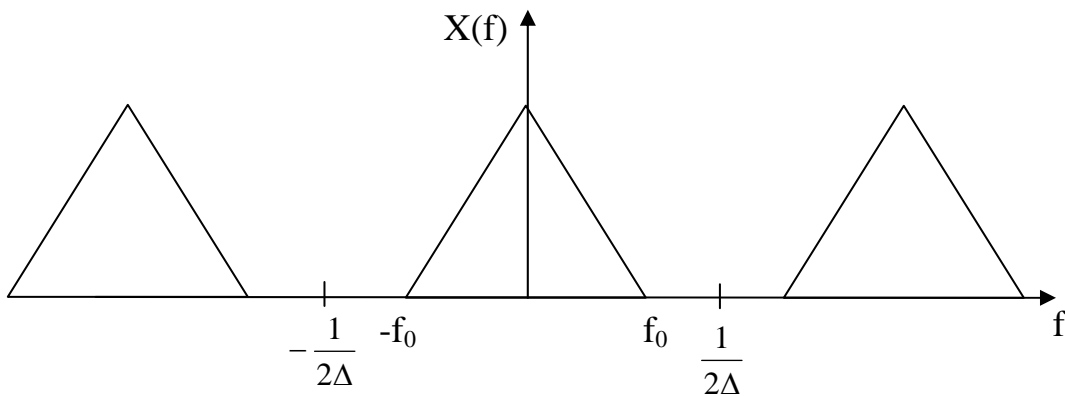
Pertanto la trasformata di Fourier di un segnale modulato di impulsi o segnale campionato (una sequenza $x(n\Delta)$) è periodica con periodo $\frac{1}{\Delta}$, cioè $X_s(f) = X_s\left(f+\frac{n}{\Delta}\right)$.

6.13.2 Aliasing

Se $X(f)=0$ per $|f| > \frac{1}{2\Delta}$ (come nella seguente figura),

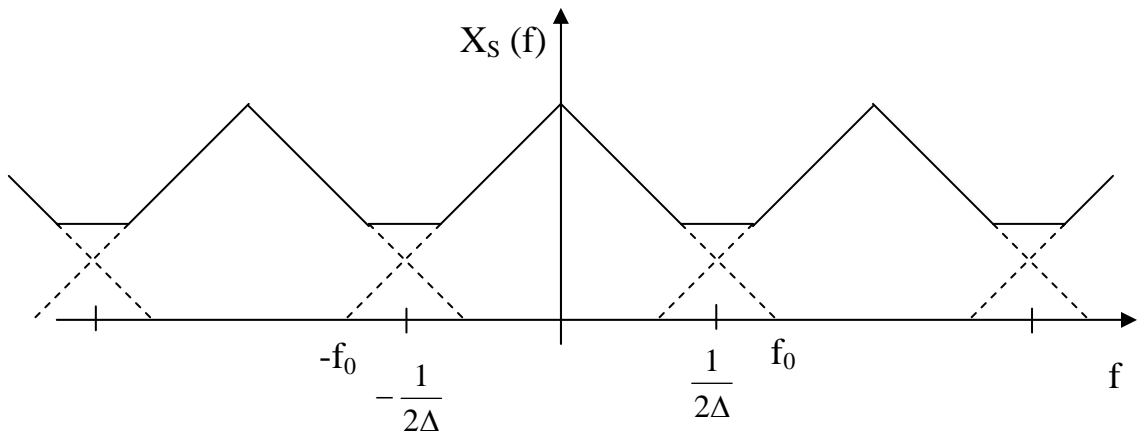


la trasformata di Fourier del segnale campionato è quella della figura successiva:

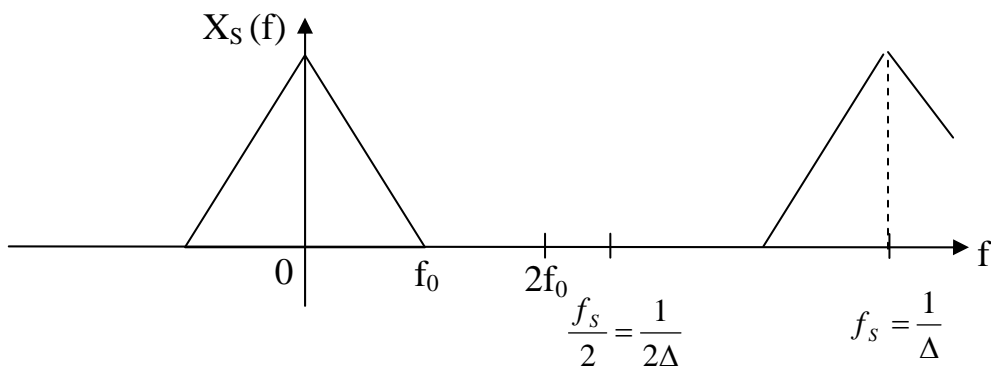


Pertanto $X_s(f)$ rappresenta correttamente $X(f)$ solo per $|f| < \frac{1}{2\Delta}$.

Se però $X(f) \neq 0$ per $|f| > \frac{1}{2\Delta}$ si ha sovrapposizione e distorsione (come illustrato nella seguente figura):



Appare allora intuitivo che la più alta frequenza nel segnale (f_0) deve essere minore di $\frac{1}{2\Delta}$ per non avere distorsione (come nella seguente figura):



Definiamo una terminologia per questi problemi.

$f_0 =$ *massima frequenza del segnale*

$f_s =$ *frequenza di campionamento*

$\frac{f_s}{2} =$ *frequenza di "folding" ("frequenza di rovesciamento") o frequenza di Nyquist*

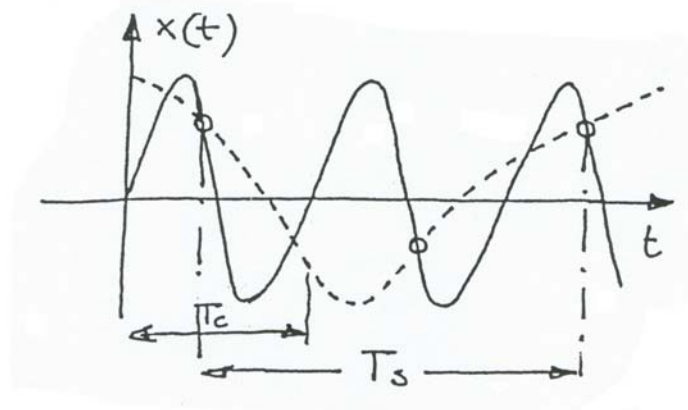
La distorsione è dovuta al fatto che le alte frequenze nei dati vengono ribaltate e "riconosciute" come basse frequenze a causa della non corretta (bassa) frequenza di campionamento. Oltre ad utilizzare frequenze di campionamento opportune, come vedremo in seguito, l'aliasing può essere evitato utilizzando filtri passa-basso prima che il segnale analogico venga digitalizzato (*filtri anti-aliasing*) in modo da fissare "artificialmente" il valore di f_0 .

Esempio 7:

Si vuole descrivere il segnale sinusoidale di frequenza f_c con una frequenza di campionamento f_s tale che $\frac{f_s}{2} < f_c$. Ne consegue:

$$T_c = \frac{1}{f_c} < 2T_s = \frac{2}{f_s}$$

L'alta frequenza della sinusoide viene riconosciuta come una frequenza minore (come nella figura seguente)



pertanto nella trasformata di Fourier del segnale anziché f_c compare un picco a frequenza più bassa.

6.14 Teorema del campionamento (Shannon)

Per campionare correttamente un segnale entro un certo intervallo, occorre utilizzare una frequenza di campionamento almeno doppia della massima frequenza presente nel segnale; in caso contrario si hanno distorsioni.

Pertanto se f_0 è la massima frequenza presente nel segnale, f_s deve essere almeno maggiore di $2f_0$. Tale criterio, generalmente accettato per ogni tipo di segnale, è stato dimostrato per il campionamento di segnali random stazionari. Altri ricercatori (Holmes e White) hanno studiato l'effetto della velocità di campionamento su segnali deterministico, dimostrando che per segnali tipo sweep (con frequenza rapidamente variabile) occorre fissare una frequenza di campionamento almeno tripla rispetto alla massima frequenza del segnale, mentre velocità di campionamento più elevate (5 o 6 volte superiori alla frequenza massima del segnale) si rendono necessarie per segnali di tipo impulsivo.

Si noti che c'è un legame molto stretto tra la velocità di campionamento (f_s), il numero di punti campionati di un segnale temporale (N), la lunghezza (tempo) di rilevamento del segnale (τ) e la risoluzione in frequenza (Δf) del segnale di Fourier trasformato. Infatti vale la ovvia relazione:

$$\tau = \frac{1}{\Delta f} = \frac{N}{f_s} \leq \frac{N}{2f_0}$$

dove:

$$\frac{\tau}{N} = \frac{1}{f_s} \quad \text{rappresenta la risoluzione (separazione) temporale del segnale}$$

$$\Delta f \quad \text{rappresenta la risoluzione in frequenza del segnale.}$$

Stabiliti quindi 2 dei 3 parametri (τ , N , f_s), a seguito delle esigenze della misura, il terzo risulta univocamente determinato.

Ciò premesso, introduciamo il teorema di campionamento di Shannon.

Se la trasformata di Fourier di una funzione $x(t)$ è nulla oltre un certo valore di frequenza, cioè:

$$X(f)=0 \quad \text{per } |f| > f_c \quad \left(f_c = \frac{f_s}{2} \right)$$

allora $x(t)$ può essere rappresentata univocamente dalla sequenza di punti:

$$x_n = x\left(\frac{n}{2f_c}\right) = x(n\Delta)$$

campionati a distanza $\frac{1}{2f_c}$.

Infatti, per quanto precedentemente visto,

$$X(f) = 0 \quad \text{per } |f| > f_c$$

$$X_s(f) = X(f) \quad \text{per } |f| < f_c$$

Poiché

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)\delta(t - n\Delta)$$

ne consegue che:

$$X_S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)e^{-j2\pi f n\Delta}$$

Pertanto:

$$x(t) = \int_{-f_c}^{+f_c} X_S(f)e^{j2\pi f t} df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta) \int_{-f_c}^{+f_c} e^{j2\pi f(t-n\Delta)} df$$

e cioè:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta) \frac{\sin 2\pi f_c(t - n\Delta)}{2\pi f_c(t - n\Delta)}$$

L'espressione precedente rappresenta il teorema di Shannon, per le funzioni limitate in banda.

Se la funzione non è limitata in banda, si introduce una distorsione. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ deve essere interpretata come una funzione di interpolazione.

6.15 Bibliografia

Sestieri A., *Dispense del corso di Meccanica delle Vibrazioni*, Università "La Sapienza" Roma, 1990.

Guj G., *Dispense del corso di Fluidodinamica I*, Università "Roma Tre", 2001.

Hammond J.K., *Signal Processing and analysis*, ISVR, Southampton (appunti del corso), 1989.

Brigham E.O., *The Fast Fourier Transform and its Applications*, Prentice-Hall, 1988.

Kolmogorov A. and S. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover, New York, 1975

Bendat J.S., Persol A.G., *Random Data - Analysis and Measurement Procedures*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York, 1986.

Oppenheim A.V. Willsky A.S. *Signals & Systems*, Prentice Hall, 1997