

Capitolo 3

Equazioni della Fluidodinamica

Come già accennato precedentemente (cap. 2.7) le equazioni di conservazione o di bilancio possono essere espresse in forma differenziale od integrale.

Si utilizza la forma differenziale quando siamo interessati a studiare i dettagli locali del flusso e vogliamo conoscere i campi delle varie proprietà del flusso. Necessitiamo in tal caso di equazioni che relazionino le varie proprietà in un dato punto.

Si utilizza la forma integrale quando siamo interessati a fenomeni fluidodinamici globali in un certo volume finito e non ai dettagli locali del flusso. Come vedremo successivamente lo studio di dettaglio, (quindi lo studio differenziale), e' spesso reso necessario dalla contingenza che fenomeni locali, quali distacchi dalla vena fluida, instabilità, transizione, possono determinare comportamenti completamente diversi a livello globale. Pertanto nel seguito tutte le equazioni saranno scritte sia in forma integrale che differenziale.

3.1 Equazione di conservazione della massa

Il principio della conservazione della massa, nel caso di un fluido in moto, esprime il concetto che la massa di un sistema arbitrario in moto resta invariata nel tempo: $\frac{dM}{dt} = 0$,

In questo caso la variabile estensiva massa è definita come $B_s = \iiint_{v(t)} \rho dv = M$, mentre la corrispondente variabile intensiva è $b=1$

Si noti che la derivata è una *derivata totale* in una descrizione Lagrangiana. Tale derivata va riportata in descrizione Euleriana mediante il teorema di trasporto di Reynolds come visto al Cap.2:

$$\frac{DB_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho b dv + \iint_{S_0} \rho \vec{b} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{v_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dv + \iiint_{v_0} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{b}) dv \quad (3.1)$$

3.1.1 Forma integrale

Dal teorema di trasporto di Reynolds sostituendo a $b \Rightarrow 1$ si ha che:

$$\boxed{\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho dv + \oiint_{S_0} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0} \quad (3.2)$$

che esprime la conservazione della massa in forma integrale. Cioé che la variazione nel tempo della massa nel volume di controllo eguaglia il flusso di massa attraverso la superficie di controllo.

3.1.2 Forma differenziale

La forma differenziale si ottiene dalla (2.14) e dalla corrispondente (2.15) sostituendo a $b \Rightarrow 1$.

$$\text{Discende da : } \frac{dM}{dt} = \iiint_{v_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right] dv = 0$$

data l'arbitrarietà del volume di controllo :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.3)$$

che può essere anche scritta come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

oppure con la derivata sostanziale

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0} \quad (3.4)$$

Per i liquidi ed i flussi incompressibili (ad esempio gas a basse velocità), l'equazione diventa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

che esprime il concetto che il campo di velocità per flussi incompressibili è a divergenza nulla (o solenoidale).

Nel seguito si darà una definizione più rigorosa di compressibilità di un gas utilizzando opportuni gruppi adimensionali.

3.2 Equazione di bilancio della quantità di moto

L'equazione di bilancio della q.d.m. per un fluido in moto, nella sua forma differenziale ed integrale, discende dalla legge di conservazione della quantità di moto per un sistema:

variazione nel tempo della q.d.m. = somma delle forze di massa + somma delle forze di superf.

In questo caso quindi : $\bar{b} = \bar{u}$ e $\bar{B}_s = \iiint_{v_s} \rho \bar{u} dv$

$$\frac{d\bar{B}_s}{dt} = \frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F}_m + \bar{F}_s \quad (3.5)$$

Si intende per forza di superficie l'integrale esteso alla superficie del sistema delle (2.28)

$$\bar{F}_s = \oiint_{S_0} \bar{T} \cdot d\bar{S} = \oiint_{S_0} \bar{T} \cdot \bar{n} dS = \iiint_{v_0} \bar{\nabla} \cdot \bar{T} dv \quad (3.6)$$

applicando il teorema della divergenza.
Per forze di volume si ha:

$$\bar{F}_m = \iiint_{v_0} \rho \bar{f} dv = \iiint_{v_0} \rho \bar{g} dv \quad (3.7)$$

assumendo che il peso sia l'unica forza di volume.

3.2.1 Forma integrale.

Applicando alla (3.5) il teorema di trasporto di Reynolds, si ottiene:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{v_s(t)} \rho \bar{u} dv = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho \bar{u} dv + \oiint_{S_0} \rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) dS = \bar{F}_m + \bar{F}_s$$

che rappresenta l'equazione cercata in termini integrali . L'equazione può anche essere scritta come segue:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho \bar{u} dv + \oiint_{S_0} \rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) dS = \iiint_{v_0} \rho \bar{f} dv + \oiint_{S_0} \bar{T} \cdot \bar{n} dS} \quad (3.8)$$

Una forma semplificata può essere ottenuta con le seguenti ipotesi aggiuntive:

- Forze gravitazionali nulle;
- Forze viscosive nulle ($\sigma_{ij}=0$);

• Condizioni stazionarie $\left(\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho \bar{u} dv \right) = 0$

Tenendo conto che:

$$\bar{T} = -p \cdot \bar{I} + \bar{\sigma}$$

possiamo riformulare l'equazione (3.8) nel seguente modo:

$$\oiint_{S_0} \rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) dS = - \oiint_{S_0} p \bar{n} dS \quad (3.8.b)$$

o in maniera analoga con l'equazione:

$$\oiint_{S_0} (\rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) + p \bar{n}) dS = 0 \quad (3.8.c)$$

3.2.2 Forma differenziale.

Si ha :
$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_{v(t)} \rho \bar{u} dv &= \iiint_{v_0} \left\{ \frac{D\rho \bar{u}}{Dt} + \rho \bar{u} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) \right\} dv = \bar{F}_m + \bar{F}_s = \\ &= \iiint_{v_0} \rho \bar{f} dv + \iiint_{v_0} \bar{\nabla} \cdot \bar{T} dv \end{aligned}$$

$$\iiint_{v_0} \left[\frac{D\rho \bar{u}}{Dt} + \rho \bar{u} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) - \rho \bar{f} - \bar{\nabla} \cdot \bar{T} \right] dv = 0 \quad (3.9)$$

Data l'arbitrarietà del volume di controllo v_0 dovrà essere uguale a zero il nucleo dell'integrale.

ma :
$$\frac{D\rho \bar{u}}{Dt} + \rho \bar{u} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) = \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} + \bar{u} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] = \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} \quad (3.10)$$

il termine dentro la parentesi quadra è nullo per la conservazione della massa .

Quindi infine :
$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{f} + \bar{\nabla} \cdot \bar{T} \quad (3.11)$$

che scritta per componenti cartesiane risulta:

$$\rho \frac{Du_k}{Dt} = \rho f_k + \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} \quad (3.12)$$

Le relazioni scritte per fluidi Newtoniani si ottengono ricordando le 2.38:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} = -\frac{\partial P}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ii} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ik} \quad (3.13)$$

$$\text{ma : } \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) ; \quad \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} \right) \quad (3.14)$$

combinando insieme la (3.12), (3.13), (3.14) si ottiene l'equazione di Navier-Stokes per fluidi Newtoniani.

$$\rho \frac{Du_k}{Dt} = \rho f_k - \frac{\partial P}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} \quad (3.15)$$

la (3.15) in forma vettoriale diventa:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} P + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u}} \quad (3.16)$$

Se λ e μ sono costanti il fluido si definisce Newtoniano.

Per i gas monoatomici ed anche per l'aria si ha $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ e quindi:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} P + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u}} \quad (3.17)$$

Per i liquidi ed i flussi incompressibili (gas con basse velocità, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ dalla conservazione della massa) :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.18)$$

Nel seguito verranno presentate altre forme dell'equazione di bilancio della quantità di moto che si otterranno sempre dalla (3.17) attraverso opportune ipotesi semplificative.

3.3 Equazione del bilancio dell'energia

L'equazione del bilancio di energia nella sua forma più semplice è conseguenza dell'applicazione del primo principio della termodinamica ad un sistema fluidodinamico in moto. Il primo principio della termodinamica per un sistema afferma :

$$\begin{array}{l} \text{variazione nel tempo} \\ \text{di energia totale} \end{array} = \begin{array}{l} \text{aumento di energia per} \\ \text{effetto del calore} \end{array} + \begin{array}{l} \text{aumento di en.} \\ \text{per effetto} \\ \text{del lavoro} \end{array}$$

Cioè fornisce l'equivalenza tra le variazioni di energia, lavoro e il calore, ed esprime il principio che l'energia può cambiare forma ma non crearsi o distruggersi. In questo caso la proprietà estensiva è:

$$E_S = B_S = \iiint_{v_s(t)} \rho e dv \quad (3.19)$$

con e l'energia totale del sistema per unità di massa, cioè la corrispondente proprietà intensiva ($b = e$ energia totale per unità di massa). La E_S nel seguito rappresenta la somma delle energie termiche e delle energie cinetiche (ma non l'energia potenziale chimica).

Poiché consideriamo un fluido reale in moto, cioè conduttivo, viscoso, compressibile, il primo principio scritto per un sistema funzione del tempo si può esprimere come segue:

$$\frac{DE_S}{Dt} = L + Q \quad (3.20)$$

dove :

E_S = energia totale termocinetica del sistema

Q = calore ceduto dall'esterno nell'unità di tempo (potenza termica)

L = lavoro compiuto dall'esterno nell'unità di tempo (potenza meccanica)

e la corrispondente proprietà intensiva vale:

$$e = U + \frac{1}{2} u_i^2 \quad (3.21)$$

Con U = energia interna per unità di massa (proprietà intensiva) e $\frac{1}{2} u_i^2$ = energia cinetica per unità di massa (proprietà intensiva).

3.3.1 Forma integrale

Dal teorema del trasporto di Reynolds :

$$\frac{DE_S}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho e dv + \iint_{S_0} \rho e \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (3.22)$$

Esprimiamo ora L come segue:

$$L = L_m + L_s \quad (3.23)$$

$$L_m = \iiint_{v_0} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dv = \iiint_{v_0} \rho f_i u_i dv \quad (3.24)$$

$$L_s = \iint_{S_0} \vec{u} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{S_0} u_i T_{ik} n_k dS \quad (3.25)$$

Con L_m = lavoro delle forze di massa e L_s = lavoro delle forze di superficie.

Essendo T_{ik} tensore delle tensioni ed analogamente:

¹ Spesso si assume positivo se compiuto dal sistema, nella presente trattazione si assume positivo se compiuto dall'esterno sul sistema.

$$Q = Q_m + Q_s \quad (3.26)$$

$$Q_m = \iiint_{v_0} \rho q dv \quad (3.27)$$

$$Q_s = -\oiint_{S_0} \vec{k} \cdot \vec{n} dS = -\oiint_{S_0} k_i n_i dS \quad (3.28)$$

essendo q il calore prodotto per unità di massa ed il segno meno in Q_s rappresentando l'effetto della normale esterna.

A questo punto si può scrivere :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v_0} \rho e dv + \iint_{S_0} \rho e \vec{n} \cdot \vec{u} dS = \iiint_{v_0} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dv + \iint_{S_0} \vec{u} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{n}) dS + \iiint_{v_0} \rho q dv - \oiint_{S_0} \vec{k} \cdot \vec{n} dS \quad (3.29)$$

che è la forma integrale dell'equazione dell'energia.

Come vedremo successivamente tale espressione può essere semplificata utilizzando opportune ipotesi.

3.3.2 Forma differenziale

Come visto al (3.2) mediante il teorema della divergenza ed accorpare i termini si ha:

$$\begin{aligned} \frac{DE_s}{Dt} &= \iiint_{v_0} \left(\frac{D\rho e}{Dt} + \rho e \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) dv = L + Q = \iiint_{v_0} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dv + \oiint_{S_0} \vec{u} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{n}) dS + \\ &+ \iiint_{v_0} \rho q dv - \oiint_{S_0} \vec{k} \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (3.30)$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo ed al quarto termine si ha :

$$\frac{DE_s}{Dt} = \iiint_{v_0} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dv + \iiint_{v_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{T}) dv + \iiint_{v_0} \rho q dv - \iiint_{v_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{k} dv$$

cioè :

$$\iiint_{v_0} \left\{ \frac{D\rho e}{Dt} + \rho e \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{T}) - \rho q + \vec{\nabla} \cdot \vec{k} \right\} dv = 0 \quad (3.31)$$

dato il volume di controllo arbitrario, devono essere nulli gli integrandi, inoltre per i primi due termini si ha per la conservazione della massa :

$$\frac{D\rho e}{Dt} + \rho e \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = e \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{De}{Dt} + \rho e \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \rho \frac{De}{Dt} \quad (3.32)$$

quindi l'equazione cercata risulta essere la seguente :

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{T}) + \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{k}} \quad (3.33)$$

Se consideriamo la forma differenziale, con il tensore scomposto in coordinate cartesiane, otteniamo:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho f_i \cdot u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k T_{ik}) + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (u_k T_{ik}) = T_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k + u_k \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik}$$

con

$$T_{ik} = -P \delta_{ik} + \sigma_{ik}$$

$$\text{inoltre :} \quad u_k \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} = -u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} T_{ki} = -P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \varepsilon_{ki} \sigma_{ki}$$

Pertanto si ha :

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \frac{u_k^2}{2} = \\ &= \rho f_i \cdot u_i - P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sigma_{ki} + u_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} - u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Come vedremo nel seguito il termine $\varepsilon_{ik} \sigma_{ik}$ ² tiene conto delle trasformazioni di energia meccanica in termica (per effetto dell'attrito).

3.3.3 Equazione di Bernoulli per flussi stazionari compressibili.

Una forma integrata dell'equazione dell'energia totale può essere ottenuta sotto le seguenti ipotesi:

- 1) $f_i =$ conservativa: $f_i = -\partial G / \partial x_i$
- 2) forze viscosse non compiono lavoro: $T_{ik} = -P \delta_{ik}$
- 3) assenza di produzione di calore: $q = 0$
- 4) assenza di conduzione di calore: $\vec{k} = 0$
- 5) flusso stazionario

² $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \sigma_{ki} = \varepsilon_{ik} \sigma_{ki}$

Tale equazione viene indicata generalmente come una delle forme (forma debole) delle equazioni di Bernoulli.

Ricordando che: $T_{ik} \cong -P\delta_{ik}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(u_k T_{ki}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(u_k (-P\delta_{ik})) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i P) = \\ &= -P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Supponendo la f_i conservativa si può introdurre il suo potenziale G

$$\begin{aligned} f_i &= -\frac{\partial G}{\partial x_i} \text{ e si ha :} \\ \rho u_i \frac{\partial e}{\partial x_i} &= -\rho \frac{\partial G}{\partial x_i} u_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} P - u_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.38)$$

dividendo per ρ si ha :

$$u_i \frac{\partial e}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0 \quad (3.39)$$

ma gli ultimi due termini danno:

$$u_i \frac{\partial P / \rho}{\partial x_i}$$

infatti:

$$u_i \frac{\partial P / \rho}{\partial x_i} = \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{u_i P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

e dalla conservazione della massa si ha:

$$-\frac{P}{\rho^2} u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{P}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Quindi si ottiene:

$$u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e + G + \frac{P}{\rho} \right) = 0 \quad (3.40)$$

dove H è l'energia totale:

$$H = \left(U + \frac{1}{2} u_i^2 + \frac{P}{\rho} + G \right)$$

Quindi :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) H = 0$$

(3.41)

e

$$H = U + \frac{1}{2} u_i^2 + \frac{P}{\rho} + G = \text{cost} \quad (3.42)$$

Ovvero H si conserva lungo una linea di corrente che ha per tangente u_i . La quantità scalare H non si modifica (ovvero si conserva) lungo il moto, in quanto il vettore u e il gradiente di H devono essere ortogonali, pertanto il flusso è isoenergetico ma non omoenergetico. Si noti che:

$$U + \frac{P}{\rho} = U + Pv = h = \text{entalpia}$$

pertanto H è anche detta entalpia totale.

Nel seguito saranno presentate altre forme del teorema di Bernoulli.

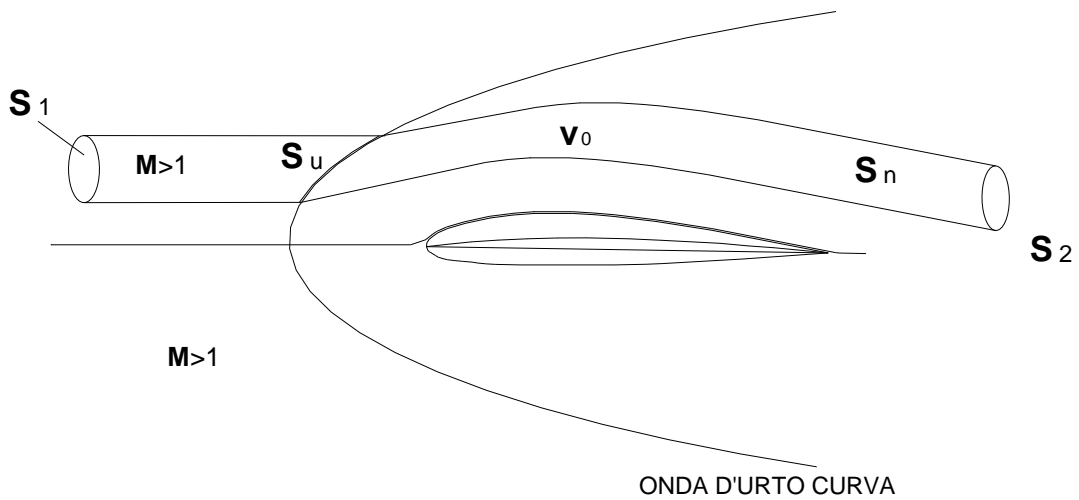
3.3.4 Conservazione dell'energia totale (*leggere*)

Abbiamo visto al paragrafo 3.3.3 una forma dell'equazione di Bernoulli sotto le condizioni

- 1) $f_i = \text{conservativa}$
- 2) forze viscosi non compiono lavoro
- 3) assenza di produzione di calore
- 4) assenza di conduzione di calore
- 5) flusso stazionario.

Vediamo ora come la condizione (3.42) si può estendere a flussi non adiabatici e viscosi purchè tali effetti siano concentrati in una regione limitata di spessore δ e volume $\delta \cdot S_u$ (discontinuità quali onde d'urto, che chiameremo *adiabatiche*, e strato limite).

Questa è detta forma forte dell'equazione di Bernoulli. In tal caso manteniamo solo le condizioni 1,3 e 5 (non la 2 e la 4) e consideriamo la 3.42 in forma integrata su un volume di controllo v_0 .



$$A = \iiint_{v_0} \rho \frac{DH}{Dt} dv = \iiint_{v_0} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{P}{\rho} + G \right) dv = \iiint_{v_0} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{\sigma}) + \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k} \right) dv = B$$

per le condizioni 3 e 5 il termine B diventa

$$B = \iiint_{v_0} (\bar{\nabla} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{\sigma}) - \bar{\nabla} \cdot \bar{k}) dv = \iint_{S_0} (\bar{u} \cdot \bar{\sigma} - \bar{k}) \cdot \bar{n} dS$$

per il teorema della divergenza, dove $\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{ij} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}$ e $k_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$

Pertanto se l'effetto è concentrato in uno strato di piccolo spessore δ che matematicamente non possiamo considerare una discontinuità, σ_{ik} e k_i sono nulli ovunque tranne che nel volume $\delta \cdot S_u$ che non fa parte di S_0 (è interna) e quindi $B = 0$.

Il termine A sarà, per la conservazione della massa,

$$A = \iiint_{v_0} \rho \frac{DH}{Dt} dv = \iiint_{v_0} \rho (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) H dv = \iiint_{v_0} \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u} H) dv = \iint_{S_0} \rho \bar{u} H \cdot \bar{n} dS$$

Per il teorema della divergenza $\bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u} H) = \rho (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) H + H \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u}) = \rho (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) H$

$$\text{Quindi } \iint_{S_0} \rho \bar{u} H \cdot \bar{n} dS = 0$$

Ma su S_n si ha $\bar{u} \cdot \bar{n} = 0$ che sono linee di corrente (come un tubo di corrente) e quindi

$$\iint_{S_1} \rho_1 u_1 H_1 dS = \iint_{S_2} \rho_2 u_2 H_2 dS$$

Allora se H_1 è omogeneo in S_1 il campo è **omoenergetico** tranne che nelle discontinuità (S_1 è arbitraria).

Pertanto il risultato è che l'energia totale si conserva in condizioni stazionarie anche attraverso gli urti e le discontinuità purchè ci si trovi in regioni dove l'effetto della viscosità e della conducibilità è trascurabile. La dimostrazione qui riportata non è rigorosa in quanto non considera il salto attraverso la discontinuità, ma tuttavia conduce ad un risultato generalmente valido.

3.3.5 Bilancio di energia meccanica

L'equazione di bilancio dell'energia meccanica si ottiene moltiplicando l'equazione della conservazione della quantità di moto per \bar{u} :

$$\rho u_k \frac{Du_k}{Dt} = \rho u_k f_k + u_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \quad 3 \quad (3.43)$$

3.3.6 Bilancio di energia termica

Il bilancio di energia termica si ottiene sottraendo l'energia meccanica da quella totale. Essendo:

$$e = U + \frac{1}{2} u_k^2$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D u_k^2}{Dt} \quad (3.45)$$

Sottraendo la (3.44) dalla (3.36)

$$\begin{aligned} \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D u_k^2}{Dt} &= \rho f_i \cdot u_i - P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sigma_{ki} + u_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i} \\ - \rho \frac{D u_k^2}{Dt} &= -\rho f_k u_k - u_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

3.3.6.1 L'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di energia interna

³ oppure :

$$\boxed{\rho \frac{D u_k^2}{Dt} = \rho f_k u_k - u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i}} \quad (3.44)$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sigma_{ki} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i} \quad (3.46)$$

od anche : $\rho \frac{DU}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} T_{ik} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i}$

in forma generale:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + (\bar{\nabla} \bar{u}) \cdot \bar{\sigma} + \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k} = -P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + \mu \varphi^2 + \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k} \quad (3.47)$$

Si noti che $-P \bar{\nabla} \cdot \bar{u}$ è il lavoro reversibile compiuto dalla pressione. Definiamo $\mu \varphi^2$ come la velocità di dissipazione dell'energia cinetica e la sua trasformazione irreversibile in energia interna:

$$\mu \varphi^2 = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \sigma_{ik} = (\Omega_{ik} + \varepsilon_{ik}) \sigma_{ik} = \varepsilon_{ik} \sigma_{ik}$$

per effetto della (2.18) e in quanto Ω_{ik} è emisimmetrica e σ_{ik} è simmetrica e quindi $\Omega_{ik} \sigma_{ik} = 0$.

Per la (2.39) $\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{jj} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}$ e quindi:

$$\mu \varphi^2 = \varepsilon_{ik} (\lambda \varepsilon_{jj} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}) \quad (3.48)$$

3.3.6.2 L'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di temperatura

Ricordando le relazioni costitutive e le definizioni di calore specifico a volume costante:

$$dU = c_v dT, \quad c_v = \left(\frac{\delta Q}{\delta T} \right)_v; \quad k_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i};$$

la (3.47) diventa:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + \mu \varphi^2 + \rho q + k \nabla^2 T \quad (3.49)$$

3.3.6.3 L'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di entalpia

Se introduciamo l'entalpia:

$$h = U + P v \quad (3.50)$$

che è l'energia associata al moto molecolare intorno al baricentro della particella di fluido. Si ottiene l'equazione dell'energia in termini di entalpia:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu\varphi^2 + \rho q + k\nabla^2 T \quad (3.51)$$

E dalla $dh = c_p dT \Rightarrow \rho \frac{Dh}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt}$ (3.52)

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu\varphi^2 + \rho q + k\nabla^2 T$$

Questa è una espressione molto importante perché è la forma di equazione di bilancio dell'energia termica più utilizzata nelle applicazioni.

3.3.6.4 L'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di entropia

Ricordiamo la definizione di S ed il secondo principio della termodinamica:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} \quad (3.53)$$

$$\delta Q = dU + Pdv$$

$$dU = TdS - Pdv = TdS + \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad (3.54)$$

Sostituendo la (3.56) nella (3.49) si ottiene l'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di entropia:

$$\rho T \frac{DS}{Dt} + \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -P\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \mu\varphi^2 + \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{k} \quad (3.55)$$

ma $\frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -P\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ per la conservazione della massa; pertanto, semplificando con il primo termine a destra, si ha:

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \mu\varphi^2 + \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{k} \quad (3.56)$$

Questa relazione mostra quali sono gli effetti fisici che portano ad una variazione di entropia: la dissipazione (ad esempio quando un flusso in moto si trova vicino ad una superficie solida ferma), la produzione di calore (ad esempio in un processo di combustione) e lo scambio di calore (ad esempio quando un flusso si muove in un condotto non adiabatico).

Da notare che combinando la definizione di entalpia con quella di entropia, si ottiene:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt} + T \frac{DS}{Dt}$$

3.3.6.5 Disequazione di Clausius-Duhén e produzione di entropia (*leggere*)

Si può dimostrare come il termine $\mu\varphi^2$ sia definito positivo. Dalla (3.48) e (2.47) si ha:

$$\mu\varphi^2 = \varepsilon_{ik} \left\{ \lambda \varepsilon_{jj} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik} \right\} = \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik}$$

e ricordando che $\lambda' = \lambda + \frac{2}{3}\mu$

$$\begin{aligned} \mu\varphi^2 &= \left(\lambda' - \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_{jj}^2 + 2\mu \varepsilon_{ik}^2 = \lambda' \varepsilon_{jj}^2 + 2\mu \left\{ \varepsilon_{ik}^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_{jj}^2 \right\} = \\ &= \lambda' \varepsilon_{jj}^2 + 2\mu \left\{ \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \varepsilon_{jj} \delta_{ik} \right\} \left\{ \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \varepsilon_{jj} \delta_{ik} \right\} = \lambda' \varepsilon_{jj}^2 + 2\mu \left\{ \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \varepsilon_{jj} \delta_{ik} \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

poiché λ' e μ sono positivi e i due termini della (3.59) sono delle forme quadratiche, deve valere $\mu\varphi^2 \geq 0$ essendo valido il segno uguale o per $\lambda' = \mu = 0$ (fluido ideale) o per fluidi reali se $\varepsilon_{ik} = 0$ (situazione fluidostatica).

Inoltre anche il termine $-\frac{1}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{k}$ contiene un elemento definito positivo:

$$-\frac{1}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{k} = k \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2 + k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (3.58)$$

$$\rho \frac{DS}{Dt} = \frac{\mu\varphi^2}{T} + \frac{\rho q}{T} - \frac{1}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{k} = \quad (3.59)$$

$$= \frac{1}{T} \left[\lambda' \varepsilon_{jj}^2 + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \varepsilon_{jj} \delta_{ik} \right)^2 \right] + k \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\rho q}{T} + k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

Si noti che i primi due termini a destra definiti positivi tengono in conto dell'energia meccanica dissipata (produzione di calore irreversibile); il terzo termine definito positivo, tiene conto della degradazione dell'energia termica nel processo di diffusione del calore. Gli ultimi due termini avranno segni dipendenti dalle condizioni.

Per condizioni adiabatiche nelle quali gli ultimi due termini siano nulli si ottiene la disuguaglianza di **Clausius-Duhén**. Infatti integrando su un volume di controllo avente frontiera adiabatiche la si ottiene:

$$\begin{aligned} \iiint_{v_0} \rho \frac{DS}{Dt} dv &= \iiint_{v_0} \left\{ \frac{\mu\varphi^2}{T} + k \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2 \right\} dv + \iiint_{v_0} k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dv = \\ &= \iiint_{v_0} \left\{ \frac{\mu\varphi^2}{T} + k \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2 \right\} dv + \iint_{s_0} k \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS \end{aligned}$$

ma l'ultimo termine nella precedente è uguale a zero perchè $\left. \frac{\partial T}{\partial n_i} \right|_{s_0} = 0$ per l'adiabaticità.

Pertanto, restano nell'integrale i due termini definiti positivi già visti e quindi:

$$\iiint_{v_0} \rho \frac{DS}{Dt} dv = \iiint_{v_0} \left[\frac{\mu \varphi^2}{T} + k \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2 \right] dv \geq 0 \quad (3.60)$$

Il segno uguale vale solo per flussi non viscosi e non conduttivi, ciò corrisponde ad una trasformazione reversibile.

Si noti che per moti stazionari di flussi non conduttivi e non viscosi ($k = \mu = \lambda' = 0$):

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0 \quad (3.61)$$

cioè l'entropia si conserva lungo le linee di corrente. Pertanto un eventuale gradiente di entropia, se presente, deve essere normale alle linee di corrente per k , μ e λ' trascurabili. Ciò è vero indipendentemente dalla storia subita dal fluido nel suo moto a monte. Pertanto il flusso può essere isoentropico ma il campo può non essere omoentropico:

$$\vec{\nabla} S \neq 0 \quad ; \quad \vec{u} \perp \vec{\nabla} S \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0$$

Nelle condizioni isoentropiche valgono le (1.2) e successive:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cost} \quad ; \quad \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{cost} \quad ; \quad \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{cost} \quad (1.2)$$

che quindi possono sostituire l'equazione dell'energia (equazione differenziale) legando mediante un'equazione algebrica le proprietà termodinamiche.

3.4 Altre forme delle equazioni di Navier-Stokes

3.4.1 Accelerazione di Lagrange

Cerchiamo un'altra forma della derivata sostanziale della velocità che viene detta accelerazione di Lagrange. Per la componente 1 possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{Du_1}{Dt} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \\ &+ u_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u_k^2}{2} - u_2 \omega_3 + u_3 \omega_2 \end{aligned}$$

allora generalizzando :

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{u_k^2}{2} + (\vec{\omega} \times \vec{u})_i$$

ovvero :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{u_k^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (3.62)$$

3.4.2 Eq. di trasporto della vorticità per flussi incompressibili.

3.4.2.1 Partendo dalle equazioni di Navier-Stokes

Avendo definito la vorticità ω , ($\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u}$) l'equazione del trasporto della vorticità (o equazione di conservazione del momento della quantità di moto) può essere ottenuta da quelle delle quantità di moto (3.18) applicando il rotore.

In notazione assoluta :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \vec{\nabla} \times (\rho \cdot \vec{f}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla} \times (\nabla^2 \vec{u})$$

$$\rho \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \rho \vec{\nabla} \times \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{\omega} + \rho (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

Le forze di massa sono generalmente conservative : $\vec{f} = -\vec{\nabla} G$
applicando il rotore :

$$\rho \vec{\nabla} \times \vec{f} = \rho \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} G \equiv 0$$

Il trasporto della vorticità risulta:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) \right) = \mu \nabla^2 \omega \quad (3.63)$$

Si noti che, attraverso opportune semplificazioni, si ha

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

Il termine $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \left[\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} \right]$ è la derivata sostanziale della vorticità, mentre il termine $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ tiene conto dell'allungamento ed accorciamento dei vortici e dà un effetto analogo a quello del regolatore di Watt o di una ballerina che allarghi o stringa le braccia al corpo.

Infatti :

- il vortice si allunga, ω cresce.
- il vortice si accorcia, ω diminuisce.

Esempio di vortice che si allunga è il gorgo prodotto nel fondo di un lavandino in corrispondenza dello scarico.

Inoltre nelle (3.66) non compare esplicitamente la pressione il che fisicamente corrisponde alla circostanza che il momento prodotto dalle pressioni è nullo.

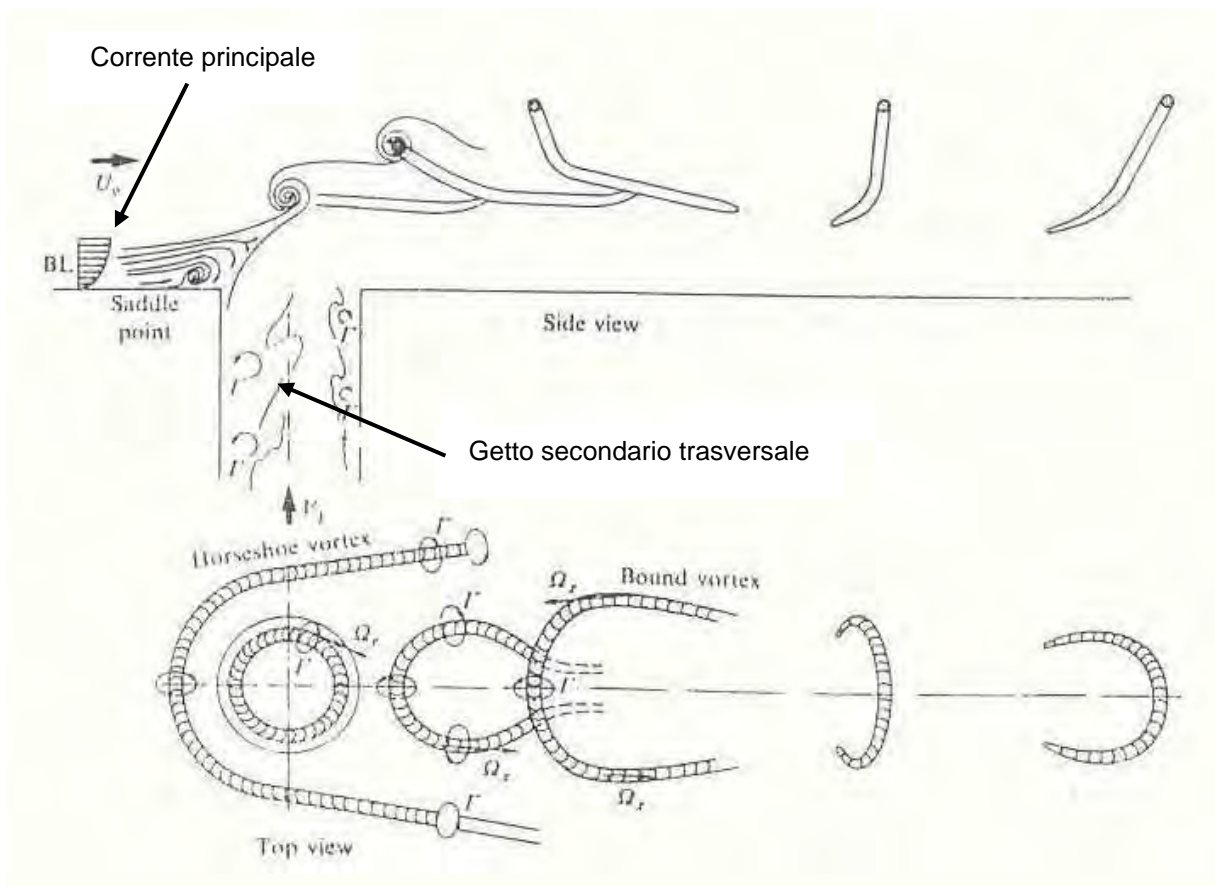
L'equazione di trasporto della vorticità (flussi incompressibili) può quindi scriversi come segue:

$$\rho \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \mu \nabla^2 \vec{\omega} + \rho (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

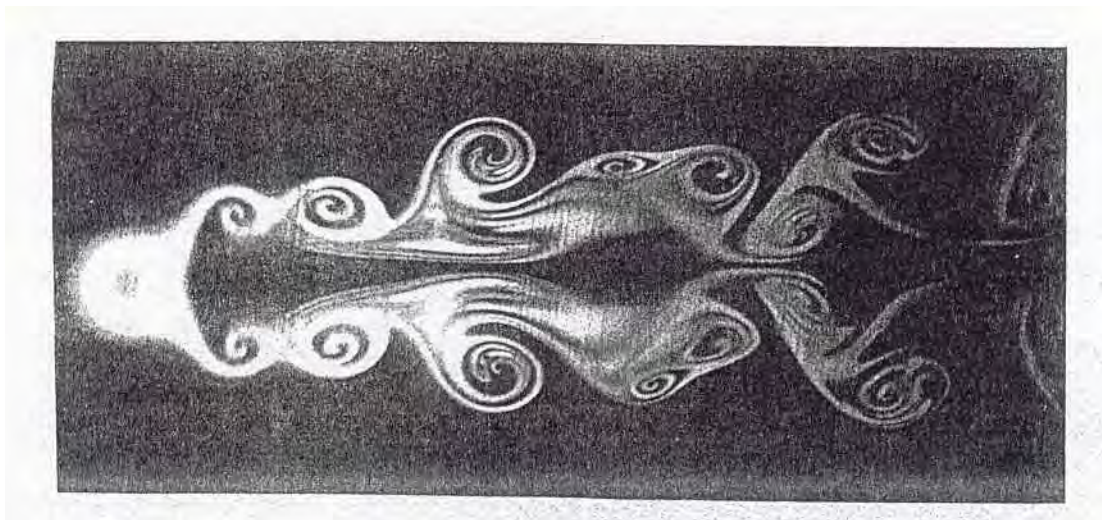
Il termine $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ viene spesso indicato come *vortex stretching*.

Un esempio di situazione in cui vortici vengono fortemente allungati e deformati è il sistema che si forma quando un getto interagisce con una corrente trasversale, come riportato nelle figure che seguono.

Formazione e distorsione dei vortici ad anello in un getto trasversale



Visione di una sezione trasversale



3.4.2.2 Partendo dall'accelerazione di Lagrange

In maniera analoga a quanto fatto nel paragrafo precedente, si può applicare il rotore all'accelerazione di Lagrange:

$$\vec{\nabla} \times \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega})$$

$$\text{oppure : } \vec{\nabla} \times \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})$$

Che dà luogo ad una formula compatta :

$$\boxed{\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) \right) = \mu \nabla^2 \vec{\omega}} \quad (3.63)$$

Nel caso incompressibile la conservazione della massa si riduce a :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 ; \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \\ \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = -\nabla^2 \vec{\psi} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi}) \end{aligned}$$

Il sistema si può scrivere come :

$$\begin{cases} \rho \left\{ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} \right\} = \mu \nabla^2 \vec{\omega} + \rho (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) \\ \nabla^2 \vec{\psi} = -\vec{\omega} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi}) \end{cases} \quad (3.64)$$

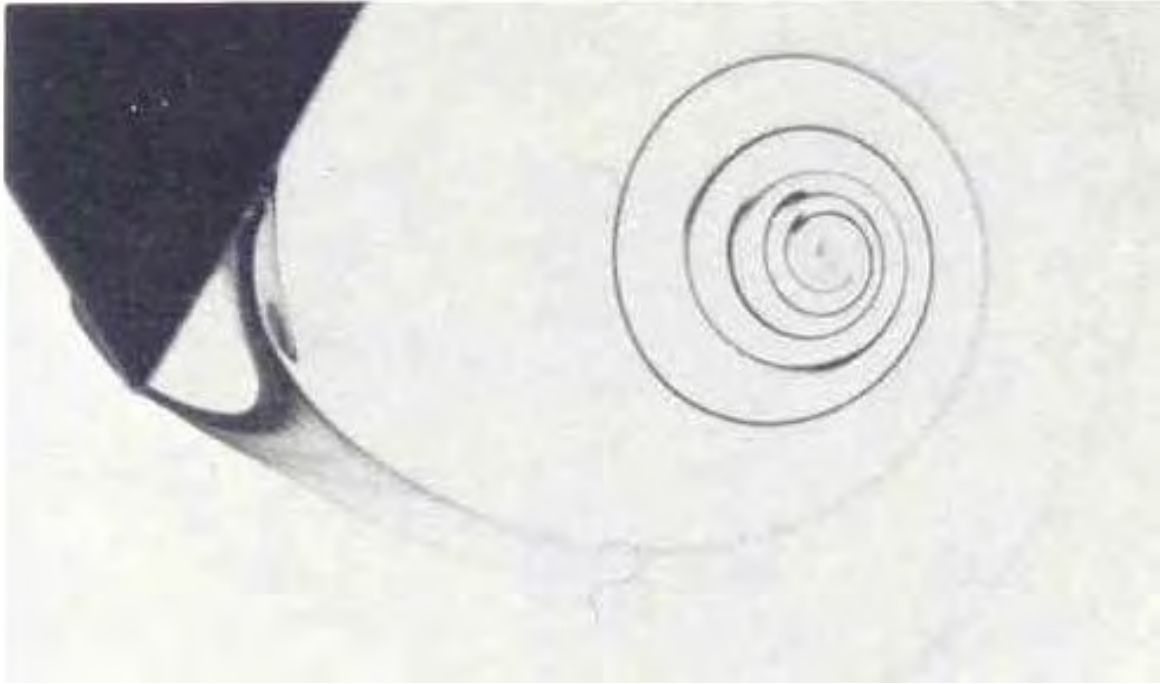
Sostituendo la seconda delle (3.64) nella prima si ottiene una eq. di IV ordine in $\vec{\psi}$ (potenziale vettore).

3.4.2.3 Trasporto di vorticità in 2D

Nel caso bidimensionale $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, $\vec{\psi} = (0, 0, \psi)$ le eq. (3.64) si riducono quindi a :

$$\begin{cases} \rho \frac{D\omega}{Dt} = \mu \nabla^2 \omega \\ \nabla^2 \psi = -\omega \end{cases} \quad (3.65)$$

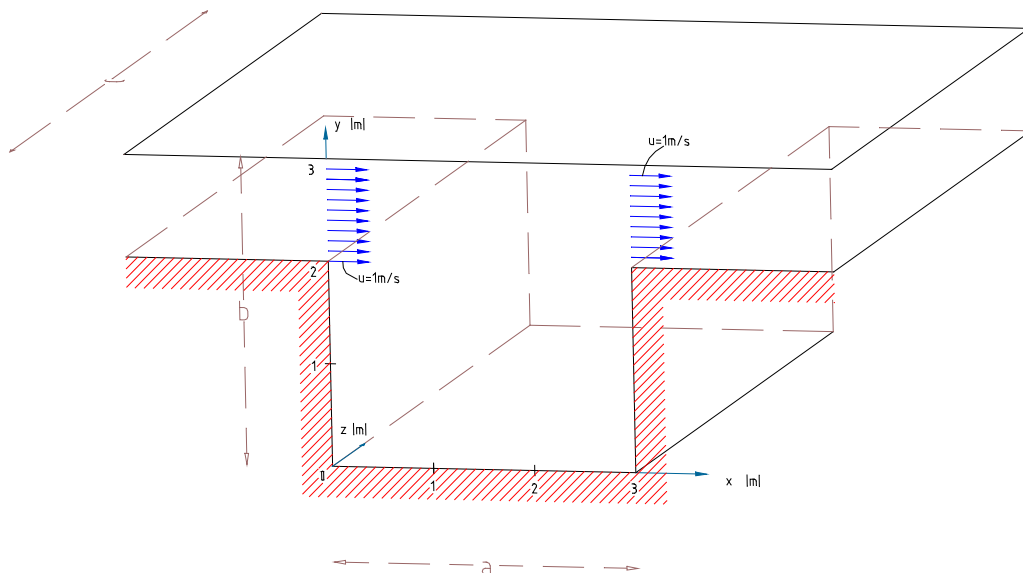
Da completare con le condizioni al contorno, che devono dare fisicamente l'impermeabilità, il non scorrimento alle pareti o le condizioni di flusso assegnate. Il sistema è ancora del IV ordine, la ψ è la funzione di corrente (ved. Cap.2).



Rilascio di un vortice al bordo di un corpo solido ($Re \cong 1000$).

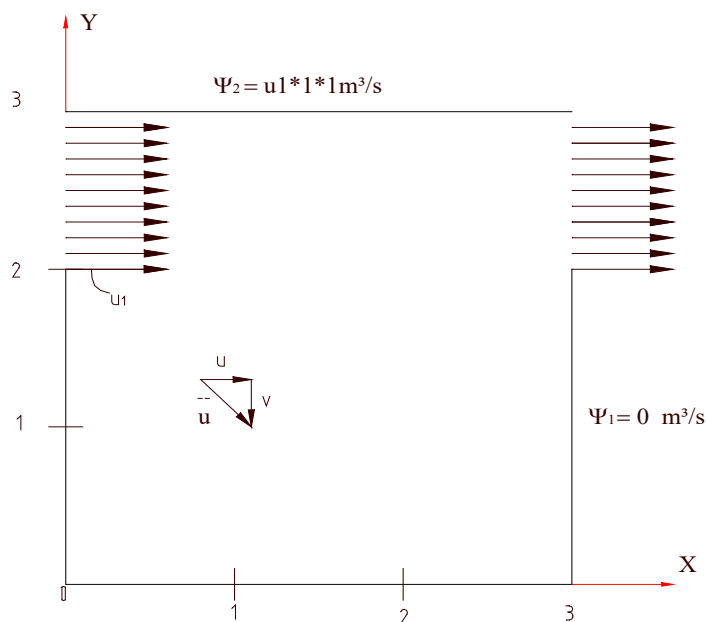
3.4.3 Cenni alla soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes in formulazione $\psi, \omega(2D)$ (*leggere*)

Consideriamo il seguente problema fisico, che può rappresentare ad esempio una vasca di sedimentazione:

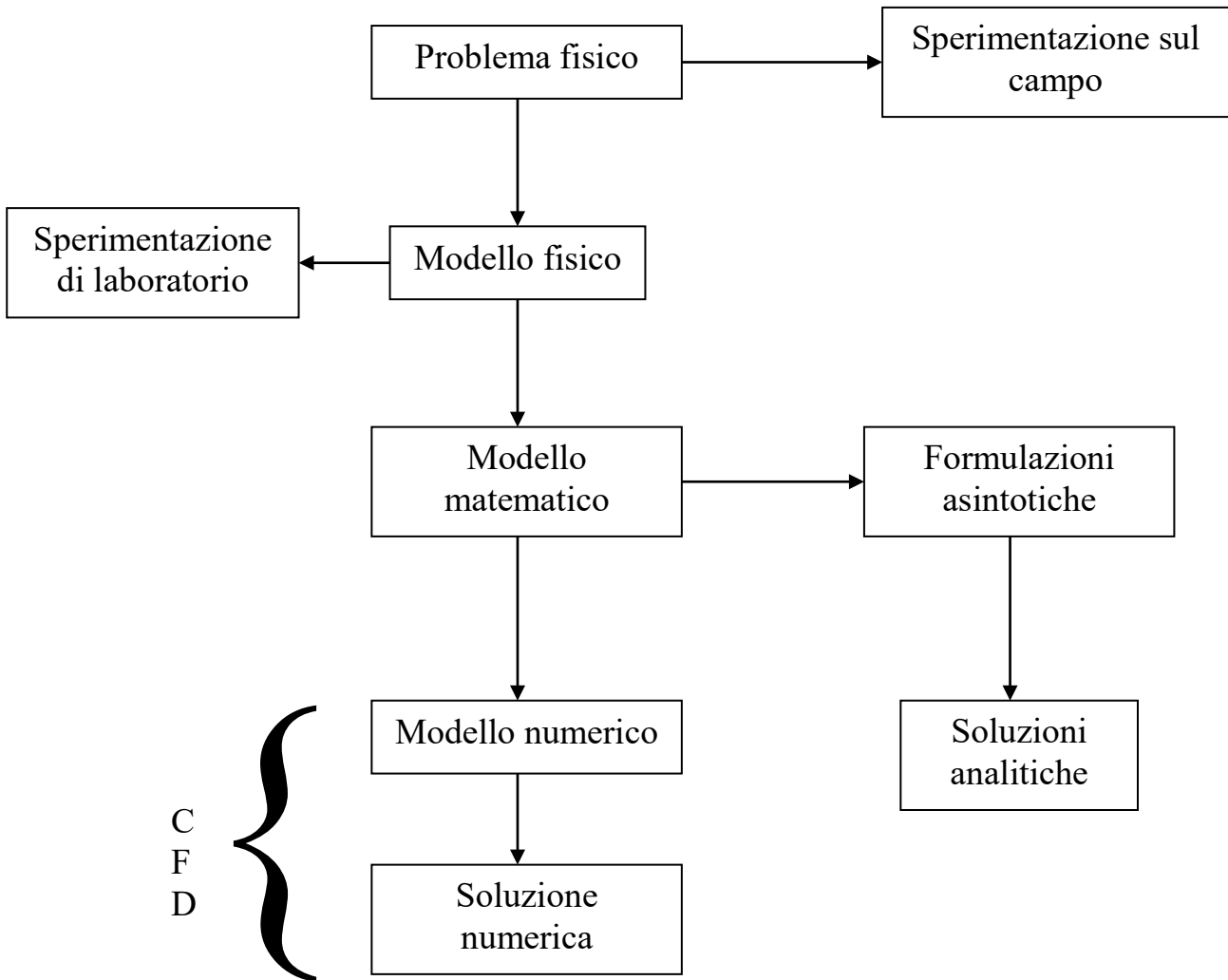


Il problema può essere considerato in 2D in quanto $a \sim b \ll c$, incompressibile (acqua), e quindi $u_3 = 0$, $\frac{\partial}{\partial x_3} = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$.

Ne discende il modello fisico



Lo schema a blocchi delle procedure di analisi di un problema fluidodinamico o genericamente fisico sono le seguenti:



Con CFD si indica la Computational Fluid Dynamics di cui viene dato un accenno nel seguito.

Il modello matematico è rappresentato dalle equazioni 3.67 completate con le seguenti condizioni al contorno fisiche (BC → Boundary Conditions).

$$\begin{array}{l}
 x = 0 \\
 x = 3
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 0 \leq y \leq 2 \\
 2 < y < 3
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \vec{u} = \vec{0} \\
 u = 1 \text{ m/s}, v = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 y = 0 \\
 y = 3
 \end{array}
 \left\{ \vec{u} = 0 \right.
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 v = 0 \\
 u = 0
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Impermeabilità parete} \\
 \text{Adesione alla parete}
 \end{array}$$

Le BC fisiche devono essere tradotte in BC matematiche che in ψ sono:

$$\begin{array}{l}
 x = 0 \\
 x = 3
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 0 \leq y \leq 2 \left\{ \begin{array}{l} \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \\
 2 < y < 3 \left\{ \begin{array}{l} \psi(y) = (y-2)u_1 = (y-2)m^3/s \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{array} \right.
 \end{array}
 \right.$$

$$y = 0 \left\{ \begin{array}{l} \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

$$y = 3 \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi_2 = 1 \text{ m}^3 / s \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Si noti che le BC su ψ sono 2 per ogni lato in quanto le 3.67 costituiscono un sistema di 2 equazioni differenziali del II ordine equivalente ad una equazione del IV ordine. ¹

¹Nota:

Un esempio monodimensionale può essere l'equazione della linea elastica di una trave (dove ψ =spostamento verticale, e ω =curvatura)

$$\frac{d^4 \psi}{dx^4} = 0$$

che può essere scritta come

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \omega}{dx^2} = 0 \\ \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\omega \end{array} \right.$$

quindi analogamente l'equazione in ψ può essere sostituita nell'equazione in ω . Le BC matematiche nelle 3.67 (equazione in ψ e ω di trasporto della vorticità) sono la definizione stessa di vorticità

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ y = 0 \\ y = 3 \end{array} \right\} \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

da calcolare sulla base del campo interno.

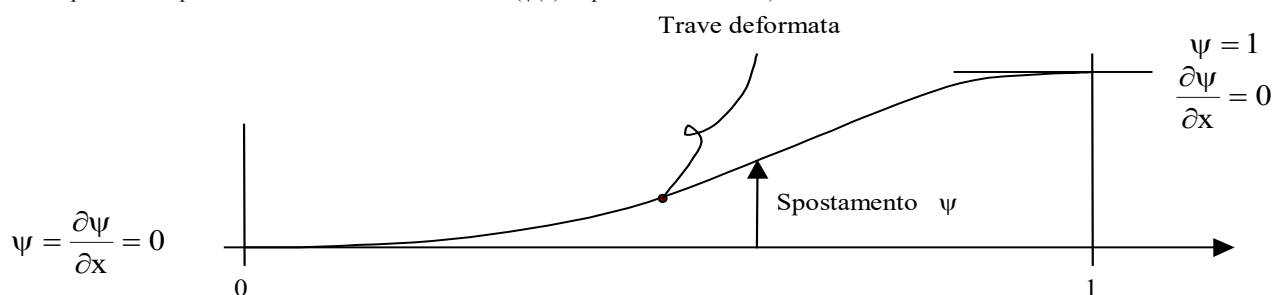
Si provi a risolvere analiticamente l'equazione

$$\frac{d^4 \psi}{dx^4} = 0$$

con le condizioni al contorno seguenti:

$$x = 0 \begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \frac{d\psi}{dx}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e ad} \quad x = 1 \begin{cases} \psi(1) = 1 \\ \frac{d\psi}{dx}(1) = 0 \end{cases}$$

che corrisponde alla equazione della linea elastica della trave ($\psi(x)$ = spostamento verticale) in forma adimensionale.



Se consideriamo una trave incastrata agli estremi, scarica, alla quale è applicato lo spostamento verticale unitario ad $x = 1$, con rotazione nulla.

SOLUZIONE

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = a$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = ax + b$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$$

$$\psi(x) = \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d$$

Calcolando le costanti con le condizioni al contorno si ottiene:

$$\psi(x) = -2x^3 + 3x^2$$

Lo stesso problema può essere risolto mediante il sistema di 2 equazioni del II° ordine con opportune condizioni al contorno; infatti, le condizioni al contorno del problema originario sono tutte sull'equazione in ψ (4), mentre non sono presenti condizioni al contorno sull'equazione in ω . Le condizioni al contorno sull'equazione in ω possono essere valutate attraverso la definizione di ω sul contorno:

$$\begin{cases} \omega(0) = \frac{d^2 \psi}{dx^2}(0) = 6 \\ \omega(1) = \frac{d^2 \psi}{dx^2}(1) = -6 \end{cases}$$

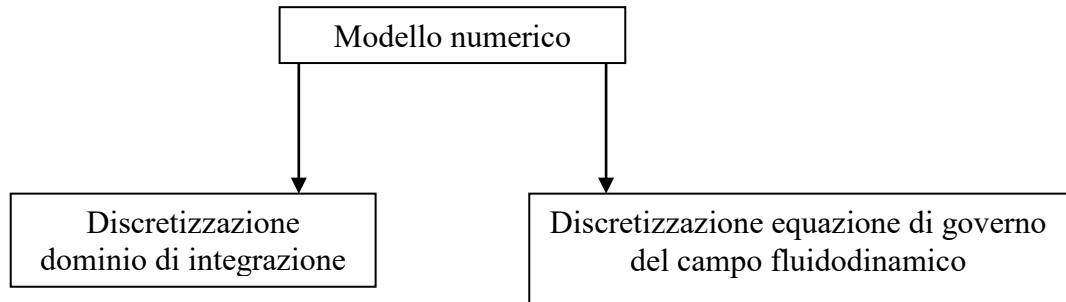
Le 2 equazioni del sistema possono in tal modo essere risolte separatamente.

Il sistema di equazioni di Navier-Stokes 3.67 analogamente potrà essere completato con condizioni al contorno per l'equazione del trasporto della vorticità date dalla definizione di vorticità sul contorno l (con l l'ascissa curvilinea) cioè

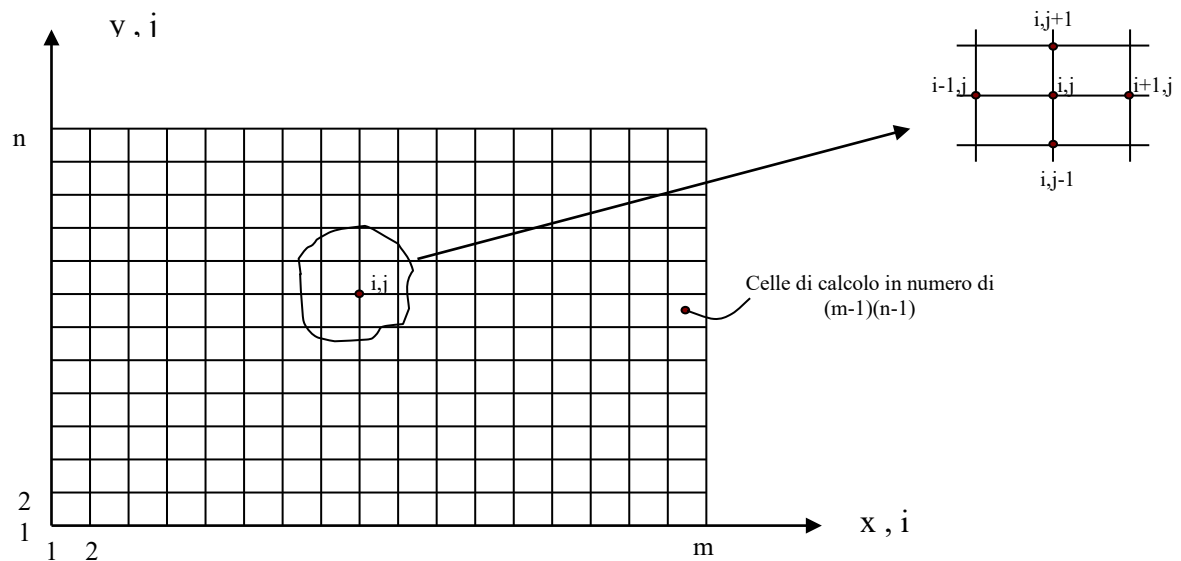
$$\omega(l) = -\frac{d^2\psi}{dx^2}(l) - \frac{d^2\psi}{dy^2}(l)$$

Le condizioni al contorno per l'equazione in ψ sono quelle definite sopra.

Vediamo ora il **modello numerico**:



Discretizzazione dominio di integrazione



Nel modello discusso ci accontentiamo di conoscere il valore nei nodi del reticolo i, j (con $i = 1, m$ e $j = 1, n$). Utilizziamo una tecnica alle Differenze Finite (FD).

Discretizzazione delle equazioni differenziali

Le derivate si ottengono da uno sviluppo in serie di Taylor. Consideriamo una generica quantità $\psi(x, y)$, che discretizzata sarà ψ_{ij} nel generico nodo i, j ed otteniamo i due sviluppi in serie

$$\psi_{i+1, j} = \psi_{i, j} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{i, j} \Delta x + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\bigg|_{i, j} \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\bigg|_{i, j} \frac{\Delta x^3}{6} + o(\Delta x^4)$$

$$\psi_{i-1,j} = \psi_{i,j} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \frac{\Delta x^3}{6} + o(\Delta x^4)$$

sommando si ha:

$$\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} = 2\psi_{i,j} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + o(\Delta x^4)$$

sottraendo si ha²:

$$\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + o(\Delta x^3)$$

Pertanto dalla prima dividendo per Δx^2 ed isolando le $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ si ottiene la derivata del II° ordine:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2)$$

dalla seconda dividendo per $2\Delta x$, si ottiene la derivata del I° ordine:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2)$$

Analogamente si ricavano le derivate $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y}$

Questo schema alle FD si dice centrato al II ordine in quanto si trascurano i termini $o(\Delta x^2)$. In analogia si possono ottenere anche derivate in avanti o indietro utilizzando i punti i,j ; $i+1,j$; $i+2,j$.

Ad esempio, dal primo sviluppo in serie si ricava automaticamente la

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

che è una espressione accurata al primo ordine.

Consideriamo ora la seconda delle 3.67. Le equazioni alle FD si ottengono come segue:

$$\nabla^2 \psi = -\omega$$

² Nota: $x_{i+1,j} - x_{i,j} = \Delta x$

$x_{i-1,j} - x_{i,j} = -\Delta x$

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \cong \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -\omega_{i,j}$$

Si hanno:

$m \times n$ nodi,

$(m-1)(n-1)$ celle

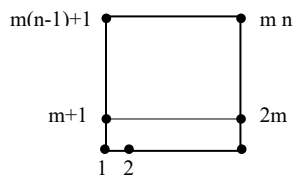
$(m-2)(n-2)$ nodi interni

$mn - 2(n+m) + 4$ equazioni algebriche date dal campo interno

$2m + 2n - 4$ equazioni date dalle condizioni al contorno

Si ottengono pertanto

mn equazioni algebriche in mn incognite costituite da ψ nei punti interni e di contorno



Pertanto le $m \times n$ incognite possono essere numerate con un indice $k=1,2,\dots, m \times n$ e quindi

$\psi_{ij} \rightarrow \psi_k$

Si ottiene un sistema di equazioni algebriche del tipo:

$$[A_{lk}] \psi_k = T_l$$

che è un sistema di equazioni algebriche con A_{lk} matrice dei coefficienti, ψ_k vettore delle incognite, T_l vettore dei termini noti. Il sistema può essere quindi risolto invertendo la matrice A_{lk} :

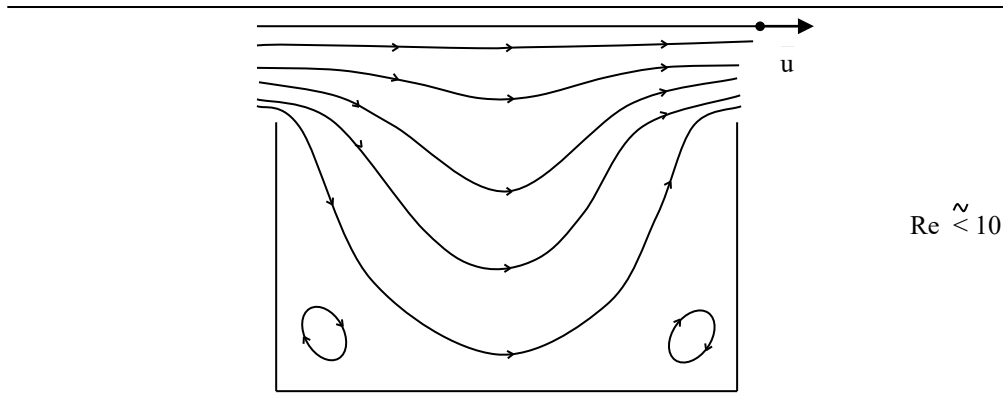
$$\psi_k = [A_{lk}]^{-1} T_l$$

La struttura matematica di A_{lk} è molto semplice (tridiagonale) e pertanto vi sono solutori molto efficienti (vettoriali e paralleli).

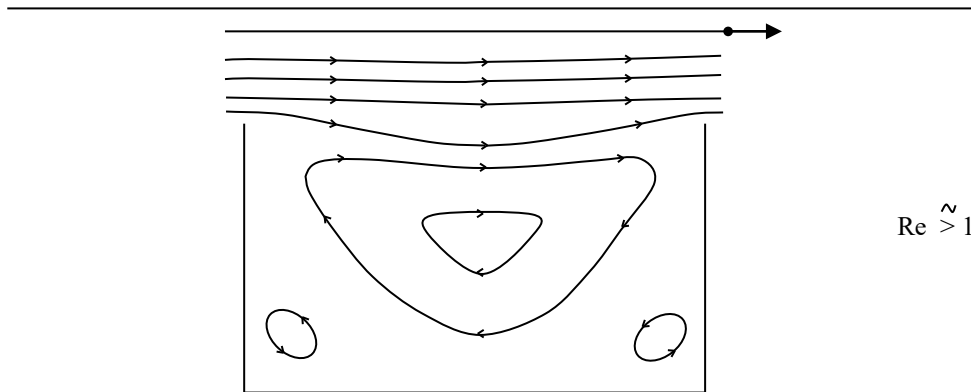
Un sistema di equazioni algebriche analogo, si ottiene dalla prima equazione delle 3.67. In questo caso, poichè l'equazione differenziale di partenza è non lineare per la presenza del termine $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}$, ne consegue che il sistema di equazioni alle differenze finite è non lineare e quindi andrà risolto in modo iterativo o linearizzando le equazioni intorno ad una soluzione nota.

Una volta risolti i due sistemi di equazioni algebriche accoppiate in ψ_{ij} e ω_{ij} , si ottengono i valori in tutti i punti del campo e, ove necessario, anche sul contorno, ed il problema risulta risolto.

Soluzione indicativa in funzione di Re – linee di corrente



$Re \approx 10$



$Re > 100$

3.5 Varie forme dell'equazione di Bernoulli

3.5.1 Equazione di Bernoulli per flussi incompressibili e rotazionali.

Si consideri l'equazione della quantità di moto di Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} P + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} P + F(\lambda, \mu)$$

gli ultimi due termini (viscosi) li poniamo come una $F(\lambda, \mu)$ e rappresentano forze non conservative, mentre la \vec{f} è conservativa

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} G$$

essendo G il potenziale gravitazionale. Le forze di pressione sono conservative in quanto, per la costanza di ρ , $\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} = \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right)$. Si sostituisca $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ espressa secondo Lagrange :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{u} \right\} = -\rho \vec{\nabla} G - \vec{\nabla} P + F(\lambda, \mu) \quad (3.68)$$

Per flussi incompressibili :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{u^2}{2} + G + \frac{P}{\rho} \right) = -\vec{\omega} \times \vec{u} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{F(\mu, \lambda)}{\rho}$$

Se si trascurano gli effetti delle viscosità $F(\mu, \lambda) = 0$, e il flusso è stazionario:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{u^2}{2} + G + \frac{P}{\rho} \right) = -\vec{\omega} \times \vec{u}$$

Pertanto la quantità :

$$H_m = \frac{u^2}{2} + G + \frac{P}{\rho} \quad (3.69)$$

si conserva sia lungo le linee tangenti ad $\vec{\omega}$ sia lungo le linee tangenti ad \vec{u} nel caso rotazionale per flussi stazionari, incompressibili con effetti della viscosità trascurabili. Cioè H_m si conserva sia lungo le linee di corrente sia lungo le linee di vorticità e quindi anche lungo il moto, infatti la formula è un caso particolare del teorema generale di Bernoulli (per $U = \text{cost}$ e per fluidi incompressibili), visto al § 3.3.3.

Nelle applicazioni idrauliche, la quantità H_m si definisce *carico idraulico*. La grandezza $\zeta = z + \frac{p}{\rho g}$ ottenuta tenendo conto che $G = gz$, nelle applicazioni idrauliche si chiama *quota piezometrica*. Altre definizioni delle grandezze in gioco, solitamente utilizzate nelle applicazioni idrauliche, sono le seguenti:

z : *energia di posizione o altezza geodetica*

$\frac{p}{\rho g}$: *energia di pressione o altezza di pressione*

$\frac{u^2}{2g}$: *energia cinetica o altezza cinetica*



Esempio di un'applicazione reale del Teorema di Bernoulli: l'acqua si solleva dalla superficie per effetto della depressione prodotta dai getti dei propulsori.

3.5.2 Bernoulli per flussi barotropici-stazionari (*leggere*)

Si dice barotropico un flusso per cui $\rho = \rho(P)$ cioè la densità non dipende dalla temperatura. Questa ipotesi è accettabile per bassi valori subsonici (con piccole variazioni di temperatura).

In tal caso le forze di pressione sono ancora conservative :

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \vec{\nabla} \int \frac{dP}{\rho(P)} \quad (3.70)$$

Infatti se definiamo : $F(P) = \int \frac{dP}{\rho(P)}$ (3.71)

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{dF}{dP} \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S}$$

Dove la formula è la proiezione del gradiente sull'ascissa curvilinea S.

Con questa ipotesi risulta :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{u^2}{2} + G + \int \frac{dP}{\rho} \right) = -\vec{\omega} \times \vec{u} \quad (3.72)$$

E vale ancora quanto detto al paragrafo precedente equazione (3.69).

3.5.3 Bernoulli per flussi potenziali-non stazionari (*leggere*)

Come già accennato se $\vec{\omega} = 0$ in tutto il campo : $\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$

dove φ è il potenziale scalare nel sistema di riferimento corpo (SRC). In tale caso :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + G + \int \frac{dP}{\rho} \right) = -\vec{\omega} \times \vec{u} + \frac{F(\lambda, \mu)}{\rho} = 0 \quad \text{dove gli ultimi due termini sono nulli per}$$

le condizioni di irrotazionalità e di effetto della viscosità trascurabile. Questo porta alla :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi}{2} + G + \int \frac{dP}{\rho} = c(t) \quad (3.73)$$

dove $c(t)$ è una costante nello spazio e funzione solo del tempo , cioè ad un dato istante assume lo stesso valore in tutto il campo . Questo vale nel sistema di riferimento corpo (SRC): se ad esempio il profilo oscilla nel sistema di riferimento associato al profilo l'aria distante oscilla ed il profilo sta fermo, quindi la $c(t)$ tiene conto di questo effetto.

3.6 Teorema di Crocco (*leggere*)

Consideriamo il I ed il II principio della termodinamica per un sistema termodinamico.

$$\delta Q = dU + Pdv ; \quad h = U + Pv$$

$$dh = dU + Pdv + vdP ; \quad \delta Q = dh - vdP ; \quad dh = \delta Q$$

$$\text{ma : } \frac{\delta Q}{T} = dS \Rightarrow \delta Q = TdS$$

quindi :

$$dh = TdS + \frac{dP}{\rho}$$

Per un fluido in moto stazionario , considerando S ed h come variabili intensive (cioè entropia ed entalpia per unità di massa) e trascurando gli effetti delle viscosità ed a combustione assente, i differenziali totali d possono essere sostituiti dai gradienti; infatti :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot dx_i = \bar{\nabla} h \cdot d\bar{x}$$

e si ottiene l'equazione di Gibbs nella rappresentazione entalpica:

$$T\bar{\nabla}S = \bar{\nabla}h - \frac{1}{\rho}\bar{\nabla}P \Rightarrow \frac{1}{\rho}\bar{\nabla}P = \bar{\nabla}h - T\bar{\nabla}S \quad (3.74)$$

che consta di una parte conservativa con potenziale entalpia specifica h ed una non conservativa (è conservativo solo per flussi isotermi $T\bar{\nabla}S = \bar{\nabla}(TS)$)

che introdotta nella (3.68) dà :

$$\bar{\nabla} \left(h + \frac{u^2}{2} + G \right) = -\bar{\omega} \times \bar{u} + T\bar{\nabla}S \quad (3.75)$$

che proiettato sulle linee di corrente diventa :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{u^2}{2} + G \right) = 0 ;$$

si definisce :

$$H' = h + \frac{u^2}{2} + G = \text{cost} \quad (3.76)$$

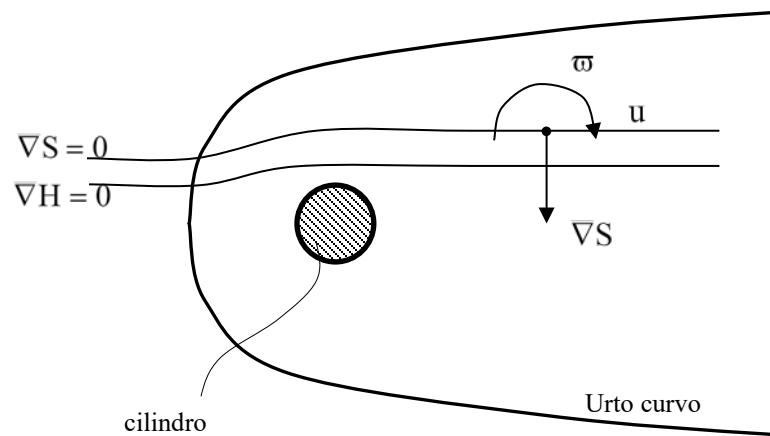
Se le linee di corrente si estendono fino all'infinito dove il flusso è uniforme , $H' = \text{cost}$ in tutto il campo (vedi sez. 3.3.4).

Essendo $\nabla H' = 0$ il teorema di Crocco afferma che :

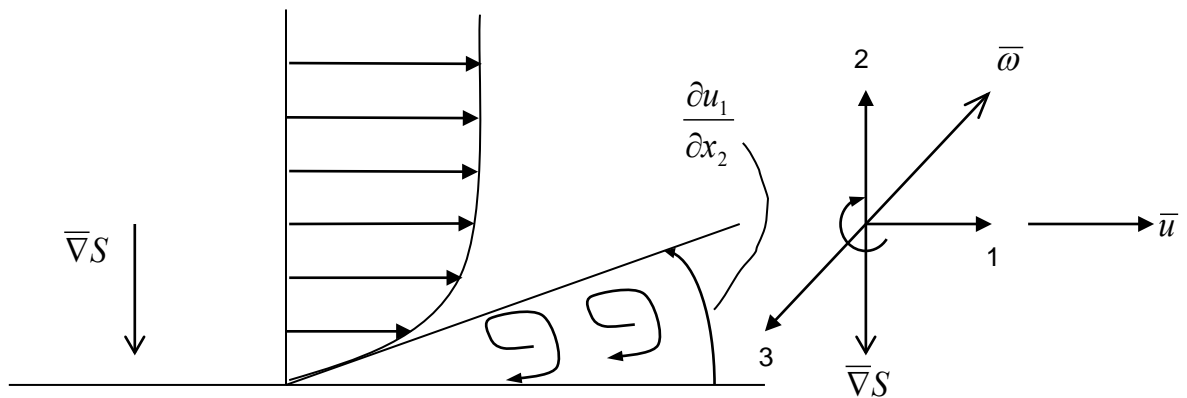
$$-\bar{\omega} \times \bar{u} + T \bar{\nabla} S = 0 \quad (3.77)$$

che stabilisce per un flusso stazionario che l'entropia è costante in tutto il campo solo se $\bar{\omega} = 0$ o $\bar{\omega}$ è parallelo ad \bar{u} . Se il flusso è rotazionale il $\bar{\nabla} S$ è normale ad $\bar{\omega}$ e \bar{u} . Inoltre se il campo è omoenergetico, ma non omoentropico, sarà presente una vorticità $\bar{\omega}$ (vedi figure).

Esempio: onde d'urto



Esempio: Strato Limite



Infatti $\mu \phi^2 \propto \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2$ cioè al quadrato delle pendenze che sono massime sulla parete.

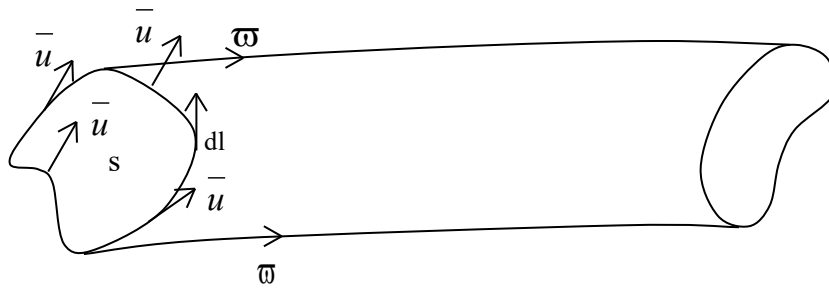
3.7 Teoremi sui vortici

Chiamiamo *regione vorticoso* il campo di flusso nel quale sia diversa da zero la vorticità :

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} . \text{ In tale regione le particelle sono animate da una velocità angolare : } \vec{\zeta} = \frac{\vec{\omega}}{2}$$

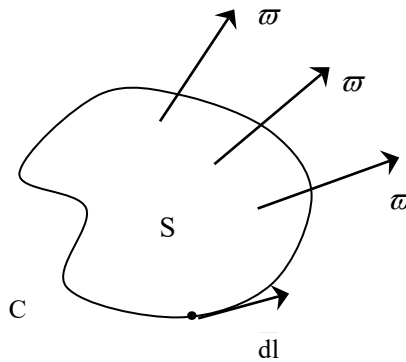
In analogia alle linee di corrente (che hanno per tangente in ogni punto il vettore velocità) possiamo definire le linee vorticoso come quelle che hanno per tangente in ogni punto il vettore vorticità .

Chiamiamo quindi *vortice* o *tubo vorticoso* lo spazio delimitato dalle linee vorticoso passanti per una linea materiale chiusa ; se la dimensione della linea è infinitesima il vortice si definisce *filetto vorticoso* .



Tubo vorticoso o vortice

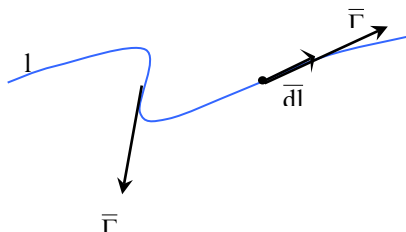
Si definisce intensità di un vortice di data sezione S il flusso di $\vec{\omega}$ attraverso di essa :



$$\Gamma = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} \tag{3.78}$$

che per domini semplicemente connessi è quindi uguale alla circolazione di \vec{u} per il teorema di Stokes .

Nel caso di filetto vorticoso la Γ può assumere un significato vettoriale in quanto sarà allineata in ogni punto della linea con la tangente alla linea stessa.



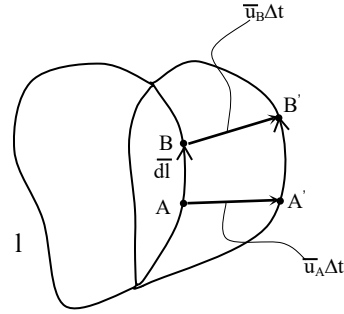
3.7.1 Teorema di Kelvin-Thompson

“La circolazione lungo un circuito chiuso , costituito sempre dalle stesse particelle è invariabile nel tempo se: il fluido è a viscosità trascurabile , le forze di massa sono conservative e il flusso è barotropico ”.

Per $\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$, si ha¹ :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{u} \cdot \frac{Dd\vec{l}}{Dt} \quad (3.79)$$

Come dimostrato in nota i nuclei di integrazione dei due integrali possono essere messi in forma di gradiente, quindi²:



$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_c \vec{\nabla} \tilde{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

¹ Essendo $\frac{d}{dt}(ab) = a \frac{d}{dt}b + b \frac{d}{dt}a$

² Il primo membro della (3.79) pertanto può essere scritto, tenendo conto delle (3.16) :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\rho \vec{f}}{\rho} - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \frac{(\mu + \lambda)}{\rho} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{\mu \nabla^2 \vec{u}}{\rho}$$

gli ultimi due termini a secondo membro sono nulli a causa dell'effetto della viscosità trascurabile; inoltre per conservatività e barotropicità possiamo scrivere:

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} G \quad ; \quad -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} = -\vec{\nabla} \int \frac{dP}{\rho}$$

$$\text{quindi :} \quad \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} \left(\int \frac{dP}{\rho} + G \right) \quad (3.80)$$

Il secondo membro della (3.79) :

$$\frac{Dd\vec{l}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{A'B' - AB}{\Delta t} \right)$$

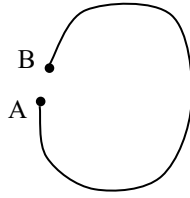
$$A'B' = d\vec{l} - \vec{u}_A \Delta t + \vec{u}_B \Delta t$$

$$\frac{Dd\vec{l}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{d\vec{l} + \vec{u}_B \Delta t - \vec{u}_A \Delta t - d\vec{l}}{\Delta t} \right) = \vec{u}_B - \vec{u}_A = \vec{u}_A + \frac{\partial \vec{u}}{\partial l} \Big|_A dl - \vec{u}_A = \frac{\partial \vec{u}}{\partial l} dl = (d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

$$\text{quindi :} \quad \oint \vec{u} \cdot \frac{Dd\vec{l}}{Dt} = \oint \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l} dl = \oint \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_c \left\{ -\vec{\nabla} G - \vec{\nabla} \int \frac{dP}{\rho} + \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} \right\} \cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{\nabla} \left\{ \frac{u^2}{2} - G - \int \frac{dP}{\rho} \right\} \cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{\nabla} \tilde{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \tilde{H}(A) - \tilde{H}(B) \quad \text{ma se} \quad A \equiv B \Rightarrow \quad \tilde{H}(A) - \tilde{H}(B) = 0$$



Infatti la circuitazione di un gradiente è uguale a zero in quanto la H se ammette un gradiente ha il significato di una funzione potenziale che è quindi funzione di punto.

$$\text{Cioè:} \quad \frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (3.81)$$

Ciò indica che la circolazione si conserva nel moto per flussi incompressibili (o barotropici) a viscosità trascurabile.

Conseguenza di ciò è che se $\bar{\omega} = 0$ all'infinito a monte anche $\Gamma = 0$ all'infinito a monte (per $t=0$). Per la (3.81) sia Γ che ω si mantengono nulli per qualunque tempo $t > 0$. Quindi $\bar{\omega} = 0$ in tutti i punti a valle tranne:

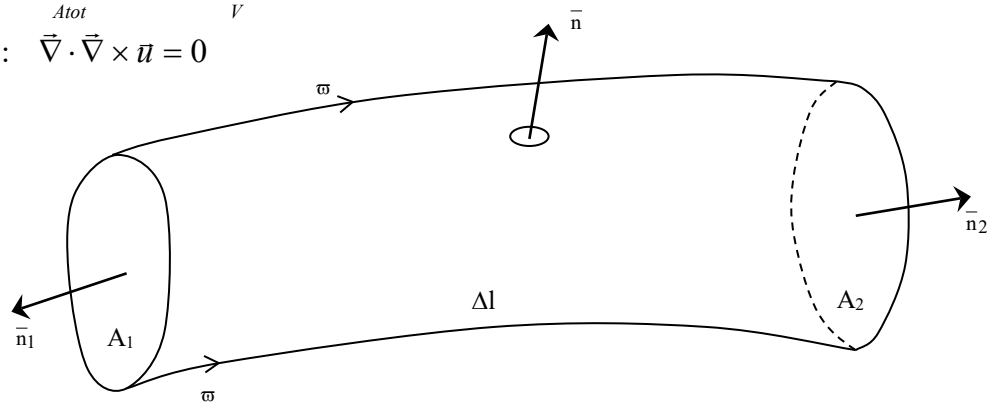
- i flussi per i quali $\vec{f} \neq -\vec{\nabla}G$ (forze di massa non conservative, convezione naturale, flussi termotropici)
- per μ e λ elevati (onde d'urto, strati limite, scie laminari o turbolente),
- $\rho = \rho(P, T)$ flussi altamente compressibili,
- in domini molteplicemente connessi (per i quali non vale il teorema di Stokes).

3.7.2 Primo teorema di Helmholtz sui vortici

“L'intensità di un vortice (tubo vorticoso) è invariabile lungo di esso”.

$$\text{Si noti che:} \quad \oint_{A_{tot}} \bar{\omega} \cdot \bar{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \bar{\omega} dV = 0 \quad (3.82)$$

$$\text{In quanto:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$$



$$\text{Pertanto:} \quad \iint_{A_1} \bar{\omega}_1 \cdot \bar{n}_1 dS + \iint_{A_2} \bar{\omega}_2 \cdot \bar{n}_2 dS + \iint_{A_l} \bar{\omega}_l \cdot \bar{n}_l dS = 0$$

$$\text{Ma:} \quad \iint_{A_l} \bar{\omega}_l \cdot \bar{n}_l dS = 0 \quad \text{per definizione di tubo vorticoso} \quad (\bar{\omega}_l \perp \bar{n}_l)$$

$$\iint_{A_1} \bar{\omega}_1 \cdot \bar{n}_1 dS + \iint_{A_2} \bar{\omega}_2 \cdot \bar{n}_2 dS = 0$$

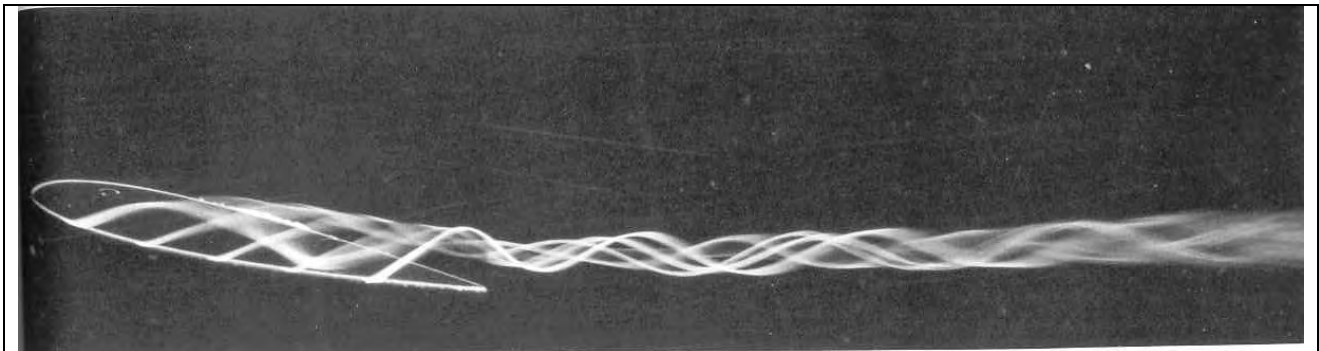
Allora :

$$\Rightarrow \Gamma_1 = \iint_{A_1} \bar{\omega}_1 \cdot \bar{n}_1 dS = -\iint_{A_2} \bar{\omega}_2 \cdot \bar{n}_2 dS = \iint_{A_2} \bar{\omega}_2 \cdot (-\bar{n}_2) dS = \Gamma_2 \quad (3.83)$$

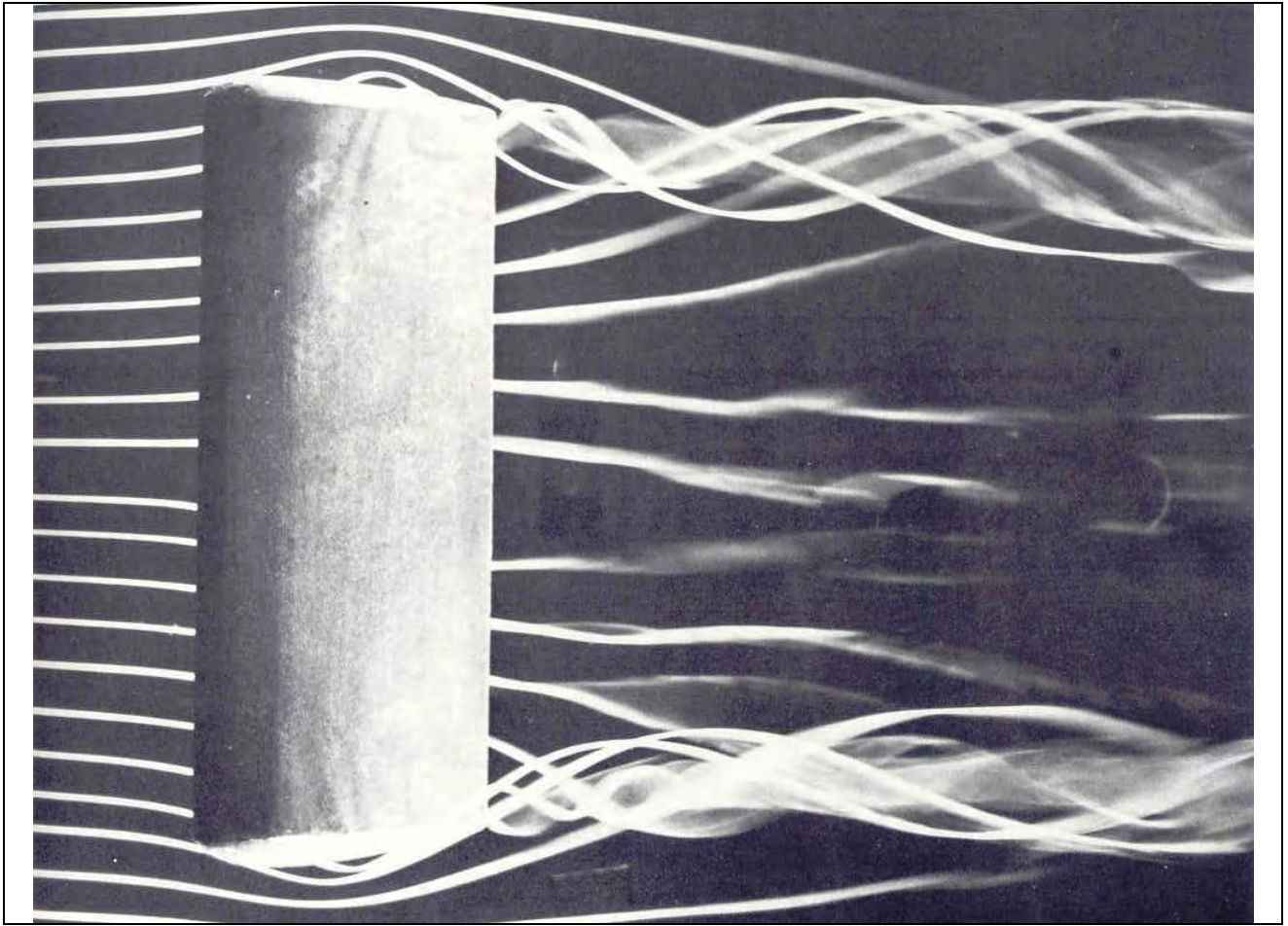
Questo teorema ha notevoli conseguenze pratiche in fluidodinamica applicata e problemi d'ingegneria meccanica, aeronautica o di geofisica.

Consegue infatti che un vortice non può avere inizio o fine nel fluido , può quindi :

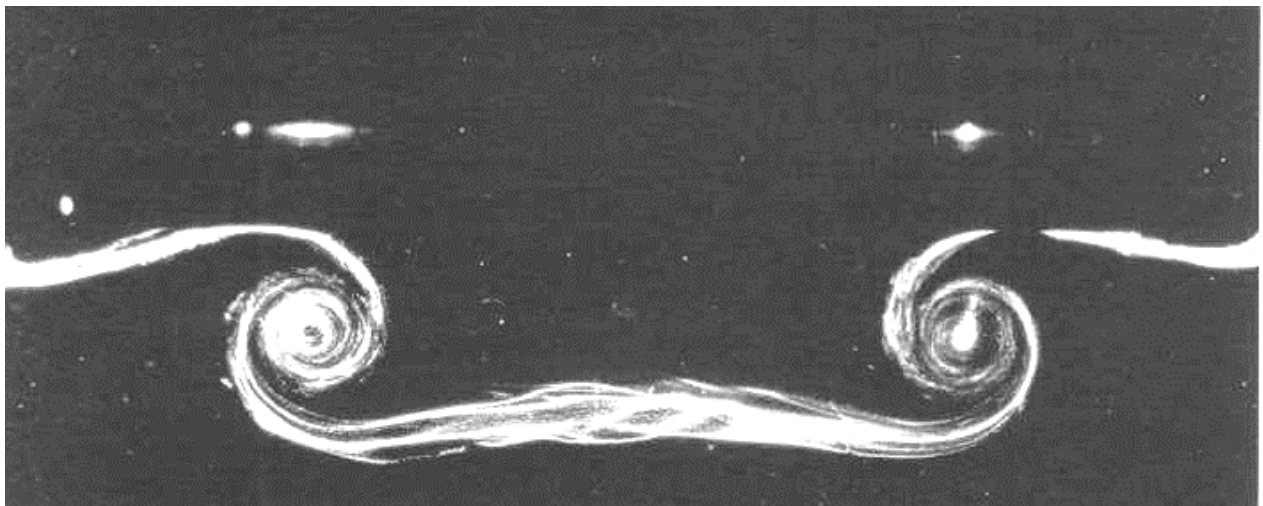
- iniziare o terminare ai confini del fluido (ad esempio contro una parete o sulle superficie libere come avviene ad esempio per i cicloni tropicali che iniziano al suolo, e terminano al limite della troposfera, altri esempi sono i vortici a valle di ostacoli quali traverse e pilastri di ponti).
- essere infinito (ad esempio i vortici rilasciati dalle ali degli aeroplani teoricamente si prolungano da un aeroporto all'altro)
- essere chiuso su se stesso a forma di toro (vortice ad anello ad esempio si pensi agli anelli di fumo³).



³ E' importante osservare che i vortici o strutture vorticose sono sempre presenti nel campo fluidodinamico, ma sovente non vengono percepiti o perchè le velocità da loro indotte sono piccole o perchè non contengono un tracciante che li visualizzi come avviene invece nell'anello di fumo (dove c'è lo scalare passivo fumo o nei cicloni dove sono presenti quali traccianti naturali acqua ed altri componenti solidi trasportati).



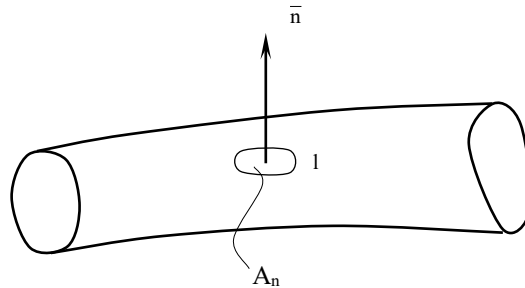
Vista laterale e vista dall'alto dei vortici di coda dal bordo di un'ala rettangolare. L'ala ha un profilo NACA 0012 e un aspect ratio di 4. A questo numero di Reynolds ($Re=10000$) la scia è laminare.



Sezione di una scia vorticoso dietro un'ala rettangolare.
Il numero di Reynolds basato sulla corda è di $Re=100000$.

3.7.3 Secondo teorema di Helmholtz sui vortici

“Le particelle di fluido che ad un dato istante appartengono ad un vortice restano sempre all’interno dello stesso”.



Prendiamo un circuito materiale l sulla superficie di un tubo vorticoso, per il teorema di Lord

Kelvin : $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$

ma la definizione di Γ dà: $\Gamma = \oint_l \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_{A_l} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA$ per il teorema di Stokes.

$\Gamma = \iint_{A_l} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = 0$ in quanto sulla superficie del tubo $\vec{\omega} \perp \vec{n}$.

Quindi : $\Gamma = \text{cost} = 0$ sulla A_l

Se una particella vorticoso uscisse attraverso A_l , ciò sarebbe contrario a quanto scritto perché

nel momento dell’attraversamento si avrebbe $\frac{D\Gamma}{Dt} \neq 0$ in quanto la particella uscente

sarebbe dotata di vorticità diversa da zero che trasporterebbe con sé.

Inoltre una particella vorticoso si avvicinerebbe ad A_l con velocità $\vec{u}_p \neq \vec{u}_l$, ma quando si trova esattamente sulla A_l la $\vec{u}_p = \vec{u}_l$ per definizione di circuito materiale e di superficie vorticoso. Quindi il tubo vorticoso si deforma con la velocità delle particelle, che pertanto non possono uscire.

Si noti che la velocità della superficie vorticoso in generale ha direzione diversa da $\vec{\omega}$. Non è detto che $\vec{\omega} \perp \vec{u}$ in quanto la \vec{u} può esser dovuta anche a flussi potenziali cioè :

$$\vec{u} = \vec{u}_{vor} + \vec{u}_{Pot} = \vec{u}_v + \vec{\nabla} \phi$$

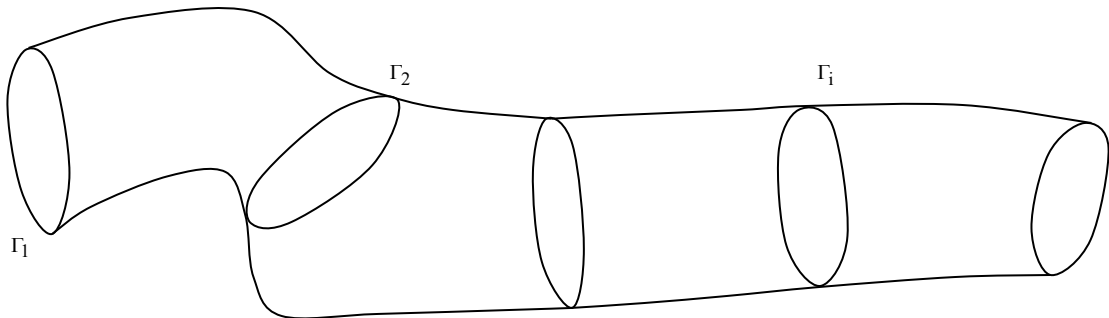
ma:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}_v + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} \times \vec{u}_v$$

Pertanto $\vec{\omega}$ e \vec{u} possono essere anche allineati in rari casi quali ad esempio in mulinello di scarico di una vasca $\vec{\omega}$ è verticale e \vec{u} sull’asse anche, mentre fuori dell’asse il moto del fluido sarà a spirale.

3.7.4 Terzo teorema di Helmholtz sui vortici

“L'intensità di un vortice è invariabile nel tempo”.



Poiché l'intensità di un vortice coincide con la circolazione lungo un circuito che lo abbracci. Presi diversi circuiti Γ_i , si avrà:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_i$$

per le (3.83) e

$$\frac{D\Gamma_i}{Dt} = 0$$

per le (3.81), il che dimostra il teorema.

3.8 Equazioni di governo della termofluidodinamica in forma adimensionale

Riassumiamo le equazioni che governano il flusso di un fluido Newtoniano (liquido o gas monoatomico a bassa densità) viscoso e in assenza di reazioni chimiche:

■ C.d.M:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.4 - 3.84)$$

■ C.Q.d.M:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.17-3.85)$$

■ Bil.En. termica:

$$\rho \cdot c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu \phi^2 + \rho \cdot q + k \nabla^2 T \quad (3.54-3.86)$$

dove il termine $\rho \cdot q$ è trascurabile.

■ Eq.Stato:

$$P = \rho R T \quad (3.87)$$

Il sistema costituisce un insieme di sei equazioni scalari nelle sei incognite $(u_1, u_2, u_3, \rho, P, T)$. Le equazioni di governo sono differenziali (compaiono le derivate), non lineari (per i prodotti tipo $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ o $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T$), alle derivate parziali, dipendenti da un certo numero di parametri (esempio μ, k, g, c_p , etc.). Le variabili indipendenti sono 3 spaziali x_1, x_2, x_3 e una temporale t .

Vediamo qual è l'importanza della trasformazione delle formule in forma adimensionale mediante il teorema di Buckingham:

- semplificazione matematica delle equazioni , studio di forme asintotiche delle equazioni.
- corretta similitudine sperimentale, cioè la conduzione di esperimenti per diverse condizioni fisiche su modelli in scala ridotta a parità dei numeri caratteristici.
- accuratezza delle soluzioni numeriche, in quanto una scelta opportuna dei valori di riferimento garantisce che le incognite del problema risultino dell'ordine dell'unità.
- indipendenza delle unità di misura

Dal teorema di Buckingham abbiamo le seguenti quantità fisiche:

- x_i, t variabili indipendenti.
- u_i, ρ, P, T variabili dipendenti.
- μ, k, c_p, g, R parametri.

Nel caso di flussi caldi (termofluidodinamica) ci dobbiamo aspettare $11-4=7$ gruppi adimensionali indipendenti (essendo quattro le quantità fisiche fondamentali: lunghezza, massa, tempo e temperatura).

Definiamo le seguenti grandezze adimensionali con ‘*’, essendo segnate con ‘0’ i valori di riferimento .

$$P^* = \frac{P}{P_0}$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$u_i^* = \frac{u_i}{u_0}$$

$$t^* = \frac{t}{t_0}$$

$$x_i^* = \frac{x_i}{L_0}$$

$$T^* = \frac{T - T_r}{T_0 - T_r} = \frac{T - T_r}{\Delta T}$$

se $T_r=0$, si ottiene $T^* = \frac{T}{T_0}$

3.8.1 Conservazione della massa

Vediamo cosa succede nella equazione della **conservazione della massa**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0}{L_0} \vec{\nabla} \cdot (\rho^* \vec{u}^*)$$

Dividendo per $\frac{\rho_0 u_0}{L_0}$ otteniamo:

$$\frac{L_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0$$

quindi :

$$\boxed{\frac{1}{St} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0} \quad (3.88)$$

Dove il numero di Strouhal è definito nella tabella alle pagine seguenti.

Può essere conveniente sostituire le equazioni di stato nella conservazione della massa per valutare l’influenza di T e P sulle variazioni di volume ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$), utilizzando le considerazioni fatte nel paragrafo (1.3.2).

Nel caso di un fluido qualunque $\rho=\rho(T,P)$ e quindi la derivata materiale si può esprimere come derivata composta:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T} \right) \frac{DT}{Dt} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial P} \right) \frac{DP}{Dt} \quad (3.89)$$

dove:

$$\frac{\partial\rho}{\partial T} = -\beta\rho \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial P} = \alpha\rho \quad (3.91)$$

con α e β coeff. di comprimibilità e di espansione termica rispettivamente.

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\beta\rho \frac{DT}{Dt} + \alpha\rho \frac{DP}{Dt} \quad (3.92)$$

quindi la (3.84) può essere riscritta :

$$-\beta\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \beta\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T + \alpha\rho \frac{\partial P}{\partial t} + \alpha\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.93)$$

dividendo tutti i membri per ρ ed introducendo le variabili adimensionali:

$$\begin{aligned} & -\beta \frac{\Delta T}{t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} - \frac{\beta u_0 \Delta T}{L_0} \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* T^* + \frac{\alpha P_0}{t_0} \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{\alpha u_0 P_0}{L_0} \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* P^* + \\ & + \frac{u_0}{L_0} \vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

adimensionalizzando, cioè dividendo tutti i termini per $\frac{u_0}{L_0}$:

$$\begin{aligned} & -\beta \Delta T \frac{L_0}{t_0 u_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} - \beta \Delta T u^* \vec{\nabla}^* T^* + \alpha P_0 \frac{L_0}{t_0 u_0} \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \\ & + \alpha P_0 \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* P^* + \vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

che diventa :

$$\frac{1}{St} \left[-\beta \Delta T \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \alpha P_0 \frac{\partial P^*}{\partial t^*} \right] - \beta \Delta T \bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^* T^* + \alpha P_0 \bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^* P^* + \bar{\nabla}^* \cdot \bar{u}^* = 0 \quad (3.96)$$

Per i gas perfetti si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{T_0} \quad (3.97)$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{\rho_0 c^2} \quad (3.98)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{St} \left[-\frac{\Delta T}{T_0} \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} \right) + \gamma \frac{Ma^2}{Ru} \left(\frac{\partial P^*}{\partial t^*} \right) \right] + \left[-\frac{\Delta T}{T_0} (\bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^*) T^* + \gamma \frac{Ma^2}{Ru} (\bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^*) P^* \right] + \bar{\nabla}^* \cdot \bar{u}^* = 0 \quad (3.99)$$

Si osservi che i numeri introdotti nella equazione sono:

$$\blacksquare St = \frac{u_0 t_0}{L_0} = \frac{\text{tempo del fenomeno}}{\text{tempo del campo}} = \text{Strouhal} \quad (3.100)$$

$$\blacksquare Ma^2 = \frac{u_0^2}{c^2} = \left[\frac{\text{velocità del campo}}{\text{velocità del suono}} \right]^2 = \text{Mach}^2 \quad (3.101)$$

$$\blacksquare Ru = \frac{\rho u_0^2}{P_0} = \frac{\text{pressione dinamica}}{\text{pressione di riferimento}} = \text{Ruark} \quad (3.102)$$

$$\blacksquare \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\text{salto di temperatura}}{\text{temperatura di riferimento}} \quad (3.103)$$

$$\blacksquare \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\text{calore specifico a pressione costante}}{\text{calore specifico a volume costante}} \quad (3.104)$$

Ritornando all'equazione della conservazione della massa:

se $\beta \Delta t \ll 1$ possiamo trascurare $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} T$

se $\alpha P_0 \ll 1$ possiamo trascurare $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} P$

se $\frac{\alpha P_0}{St} \approx 1$ non possiamo trascurare gli effetti di compressibilità in fenomeni non stazionari ($\alpha P_0 \ll 1, St \ll 1$): è il caso ad esempio del **colpo d'ariete** nei liquidi.

Analogamente per gas perfetti

se $\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1$ possiamo trascurare $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} T$

se $\frac{\gamma \cdot Ma^2}{Ru} \ll 1$ possiamo trascurare $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} P$

se $\frac{\gamma \cdot Ma^2}{St Ru} \approx 1$ non possiamo trascurare gli effetti di compressibilità in fenomeni non stazionari.

3.8.2 Conservazione della quantità di moto

Vediamo adesso come si adimensionalizza l'equazione della **quantità di moto**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{St} \left(\rho^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t^*} \right) + \rho^* (\bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^*) \bar{u}^* = -\frac{1}{Ru} \bar{\nabla}^* P^* + \frac{1}{Fr} \rho^* \frac{\bar{g}}{g} + \\ + \frac{1}{Re} \bar{\nabla}^2 \bar{u}^* + \frac{1}{3Re} \bar{\nabla}^* (\bar{\nabla}^* \cdot \bar{u}^*) \end{aligned} \quad (3.105)$$

3.8.3 Bilancio dell'energia termica

Adesso vediamo come si adimensionalizza il bilancio **dell'energia termica**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{St} \rho^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* (\bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^*) T^* = \frac{Ec}{St \cdot Ru} \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{Ec}{Ru} (\bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^*) P^* + \\ + \frac{Ec}{Re} \phi^* + \frac{1}{Re \cdot Pr} \nabla^2 T^* \end{aligned} \quad (3.106)$$

3.8.5 Equazioni di stato per gas perfetti

$$P = \rho R T$$

$$\text{Prendendo } T_r=0 \quad T^* = \frac{T}{T_0}$$

$$P_0 P = \rho_0 \rho^* R T_0 T^*$$

$$P^* = \rho^* T^* \left(\frac{\rho_0 R T_0}{P_0} \right) = \rho^* T^* \left(\frac{\gamma R T_0}{u_0^2} \frac{\rho_0 u_0^2}{\gamma P_0} \right) = \rho^* T^* \frac{c^2}{u_0^2} \frac{\rho_0 u_0^2}{P_0} \frac{1}{\gamma} \Rightarrow$$

$$P^* = \rho^* T^* \frac{Ru}{\gamma Ma^2} \quad (3.107)$$

Pertanto non risulta essere un altro gruppo indipendente in quanto è uguale a quello che compare nell'equazione di conservazione della massa.

3.8.5 Riassunto numeri caratteristici per un gas perfetto

Nelle equazioni (3.88), (3.105), (3.106) e (3.107) compaiono, come atteso, 7 gruppi adimensionali, che sono:

$$1) St = \frac{t_0 u_0}{L_0} = \frac{\text{tempo fenomeno}}{\text{tempo fluido}} \quad (3.100)$$

$$2) Ma^2 = \frac{u_0^2}{c^2} = \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze elastiche}} \quad (3.101)$$

$$3) Ru = \frac{\rho_0 u_0^2}{P_0} = \frac{\text{forze di inerzia}}{\text{forze di pressione}} \quad (3.102)$$

$$4) Fr = \frac{u_0^2}{gL_0} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze di massa}} \quad (3.108)$$

$$5) Re = \frac{u_0 \rho_0 L_0}{\mu} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze viscosi}} \quad (3.109)$$

$$6) Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\text{diffusività cinematica}}{\text{diff.termica}} \quad (3.110)$$

$$7) \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.104)$$

Gli altri gruppi adimensionali possono essere ricavati come combinazioni dei 7 gruppi indipendenti ora visti. Ad esempio:

$$\begin{aligned} Ec &= \frac{u_0^2}{c_p T_0} = \frac{\text{energia meccanica (cinetica)}}{\text{energia termica}} = \\ &= \frac{\gamma u_0^2 R}{c_p \gamma RT_0} = \frac{\gamma R u_0^2}{c_p c^2} = \frac{c_p}{c_p c_v} (c_p - c_v) Ma^2 = (\gamma - 1) Ma^2 \end{aligned} \quad (3.111)$$

Inoltre, introduco 2 nuovi gruppi adimensionali che utilizzeremo successivamente:

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \rho_0^2 \cdot \Delta T_0 \cdot L_0^3}{\mu^2} = \frac{\text{forze di galleggiamento}}{\text{forze viscosi}} \quad (3.112)$$

$$Nu = \frac{\lambda L_0}{k} = \frac{\text{calore totale scambiato}}{\text{calore scambiato per conduzione}} \quad (3.113)$$

Si noti che nella (3.96) compaiono altri due gruppi $\beta\Delta T$ e αP_0 in quanto abbiamo introdotto le sensibilità che sono parametri dimensionali indipendenti. Analogamente, nella (3.99) compare il gruppo $\Delta T/T_0$

3.8.6 Soluzioni asintotiche

Possiamo a questo punto definire le formulazioni asintotiche e da queste trovare le corrispondenti soluzioni asintotiche.

■ Flussi stazionari:

$\frac{1}{St} \ll 1$, ($St \rightarrow \infty$) tutti i termini di derivate temporali possono essere trascurati.

Questo numero (St) è importante se si trattano campi fluidodinamici non-stazionari (ad esempio elicotteri in volo di avanzamento, vele o profili alari in presenza di vento con raffiche).

■ Flussi barotropici:

$\beta\Delta T \ll 1$ o per gas perfetti $\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1$, conseguentemente : $\rho = \rho(P)$, le variazioni di

temperatura sono in K.

Si verifica nei flussi compressibili subsonici.

■ Flussi termotropici

$\alpha P_0 \ll 1$ conseguentemente : $\rho = \rho(T)$; nel caso di gas perfetti : $\frac{\gamma \cdot Ma^2}{Ru} \ll 1$ cioè

la velocità del flusso è piccola rispetto alla velocità del suono.

Si verifica nella convezione naturale

■ Flussi incompressibili

$\beta\Delta T \ll 1$, $\alpha P_0 \ll 1 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

Si verifica per la totalità dei flussi di liquidi (acqua) e per la maggior parte dei flussi di gas (aria)

■ Flussi con forze di massa trascurabili

$\frac{1}{Fr} \ll 1$, $Fr \rightarrow \infty$

corrisponde alle situazioni in cui non conta il galleggiamento (ad esempio, nell'idrodinamica navale il Fr è importante)

■ Flussi Euleriani

$\frac{l}{Re} \ll 1$, $Re \rightarrow \infty$ il fenomeno è governato dalle forze di inerzia e di pressione.

Questa situazione è estremamente importante in meccanica ed aeronautica in quanto in tali processi i Re sono estremamente grandi (ordine $10^5 \div 10^7$) e quindi tendenti ad ∞ . In tali casi, i termini diffusivi (viscosi) possono essere eliminati dalle (3.85).

■ Flussi Stokesiani

$\frac{l}{Re} \gg 1$, $Re \rightarrow 0$, con termini convettivi nulli, il fenomeno è governato dalle forze

viscose e di pressione (importante in problemi di sedimentazione di solidi piccoli in aria o acqua, moti in capillari)

■ Flussi a convezione naturale (*leggere*)

Tali flussi fanno parte della categoria dei flussi termotropici con ulteriori ipotesi dovute a **Boussinesq** :

a) Flusso incompressibile e campo delle velocità solenoidale ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$).

b) Si considera la densità costante in tutti i termini delle equazioni tranne che nelle forze di massa.

c) Si sviluppa la densità in serie di Taylor :

$$\rho = \rho(T) \approx \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T}(T - T_\infty) \approx \rho_0 - \rho_0 \beta (T - T_\infty) \quad (3.114)$$

Sostituendo nella equazione della quantità di moto :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} \tilde{P} - \vec{\nabla} P' + \rho_0 \vec{g} - \beta \rho_0 (T - T_\infty) \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.115)$$

Essendo $P = \tilde{P} + P'$ con P' la pressione idrostatica ; tale equazione si può adimensionalizzare :

$$\frac{D\vec{u}^*}{Dt^*} = -\vec{\nabla}^* \tilde{P}^* - \frac{Gr}{Re^2} T^* \frac{\vec{g}}{g} + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{u}^* \quad (3.116)$$

Per l'energia :

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \nabla^{*2} T^* \quad (3.117)$$

Per la conservazione della massa :

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (3.118)$$

Si noti che compare il Gr definito nella (3.112).

3.8.7 Importanza dei numeri caratteristici nelle leggi di similitudine

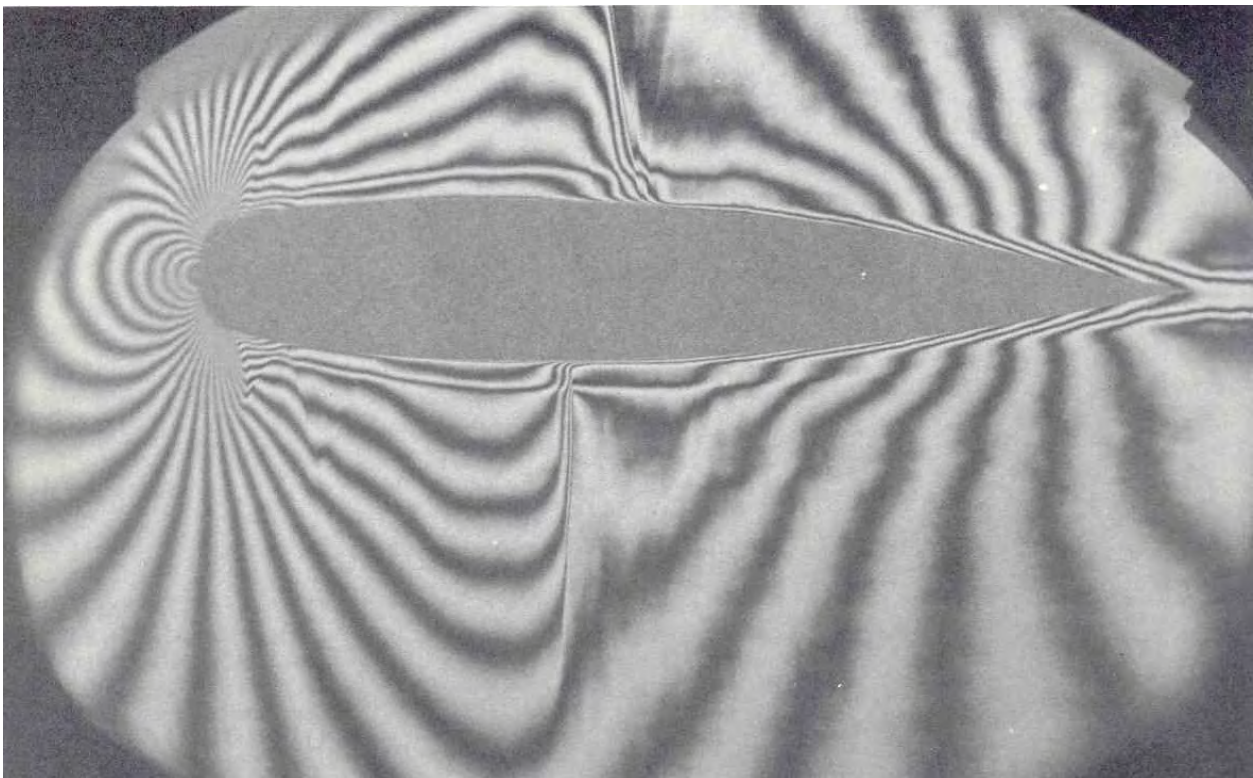
E' ovvia l'impossibilita di soddisfare le leggi di similitudine, con una soluzione numerica e soprattutto con un'analisi sperimentale su modelli in scala, per tutti e 7 i numeri adimensionali visti al (3.8.5). Pertanto è importante definire i gruppi maggiormente significativi in relazione allo studio del particolare problema fluidodinamico.

■ Numero di Mach

$Ma < 0.3$ la dipendenza dal numero è trascurabile (idrodinamica e aerodinamica di veicoli, palettature di turbine idrauliche, eliche navali, ventilatori).

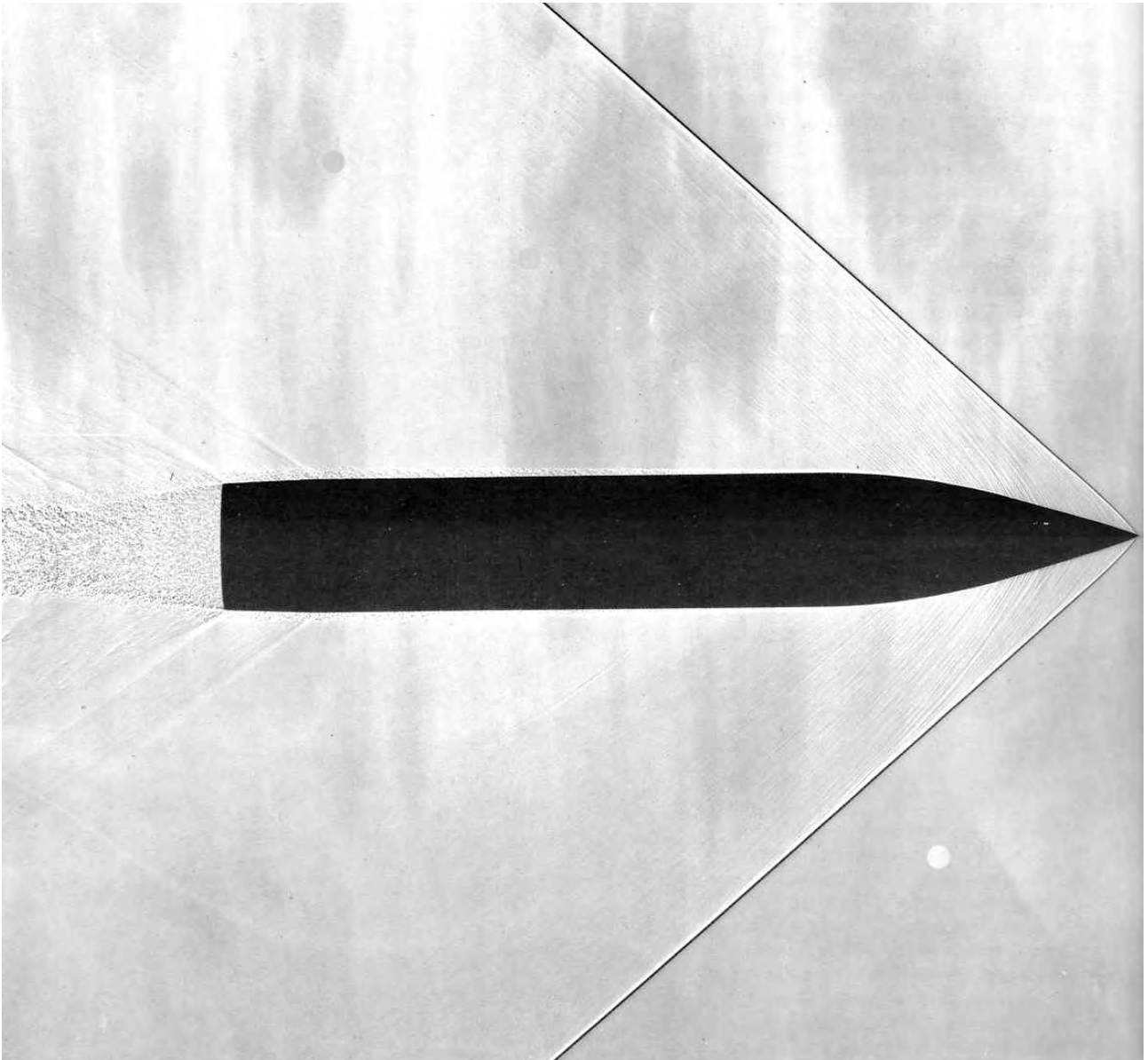
$0.3 < Ma < 0.7/0.8$ cioè fino ai limiti del regime transonico, la dipendenza da Ma non è trascurabile (gallerie ad alte velocità subsoniche, aerei civili, palette di turbomacchine, generatori eolici, ecc..). E' possibile utilizzare gallerie a basse velocità considerando la teoria linearizzata dell'equazione del potenziale (non esposta nel presente corso).

$0.7/0.8 < Ma < 1.4$ in regime transonico, la dipendenza dal Ma è importante (gallerie ad alte velocità transoniche, velivoli civili e militari, palette di turbine a gas, ugelli di bruciatori industriali, ecc..).



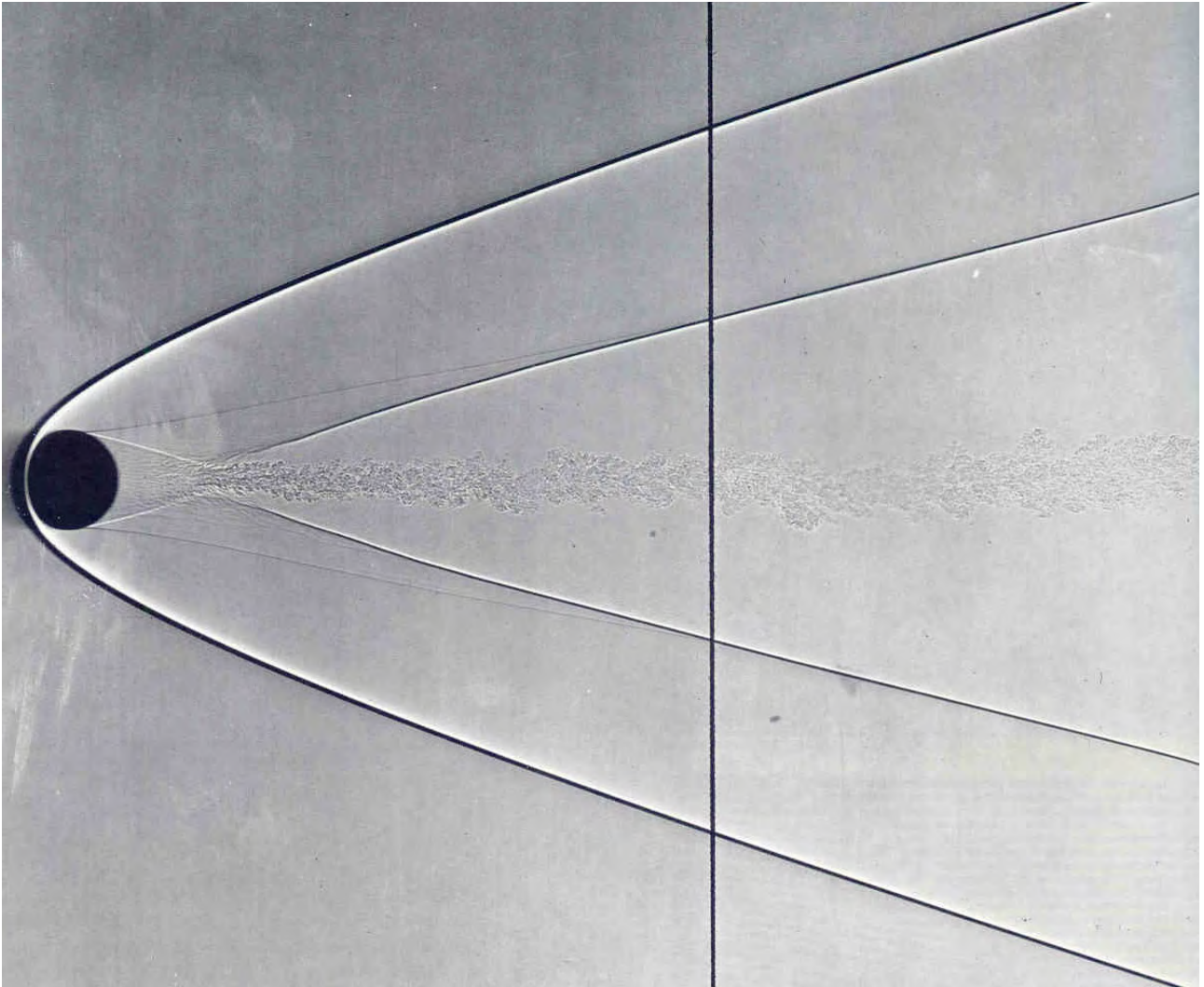
Frange d'interferenza, che in condizioni transoniche possono essere confuse con le isobare, per un flusso transonico ($Mach=0.8$) intorno ad un profilo di spessore 16.3%. Si noti la pressione elevata al punto di ristagno anteriore, le zone di depressione in corrispondenza del massimo spessore precedute da una linea sonica e seguite da un'onda d'urto (infittimento delle isobare).

1.2 <math>Ma < 4</math> flusso supersonico (gallerie supersoniche, velivoli militari, razzi, missili, proiettili, ugelli di propulsori di veivoli supersonici e non, ecc..).

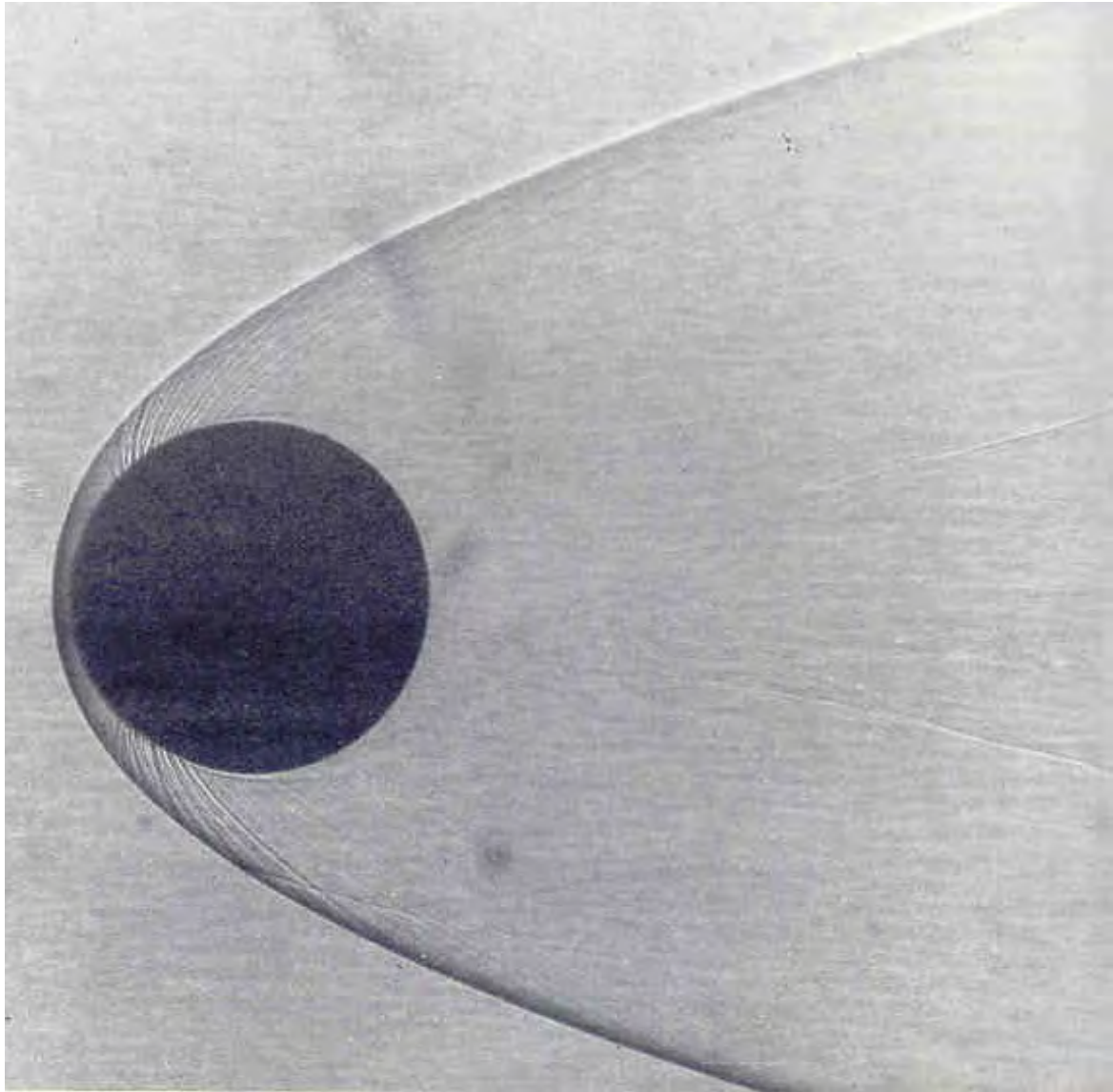


Proiettile lanciato a velocità supersonica ($Ma=1.7$)

Ma>4 flusso ipersonico. L'aria dissocia, si formano gas ionizzati con reazioni chimiche (problemi di rientro di navicelle spaziali, gallerie a plasma, propulsori per voli spaziali).



Shadograph di una sfera a $Ma=4.01$ in volo libero attraverso l'aria atmosferica.



Shadograph di una sfera a $Ma=7.6$ in volo libero attraverso l'aria atmosferica.

■ Numero di Reynolds

A Re alti se lo strato limite (strato viscoso vicino alla parete del corpo) è noto ed il suo stato è stabile, l'influenza del numero è ridotta e può essere facilmente valutata. Tuttavia in molti esperimenti di carattere fluidodinamico ed aerodinamico il Re si trova in prossimità del suo valore critico per la stabilità dello strato limite; in particolare le posizioni del punto separazione e di transizione del flusso da laminare a turbolento è fortemente influenzato dal Re come attestato dal C_D per le sfere, il cilindro, il disco ecc..

Grafico C_D sfera

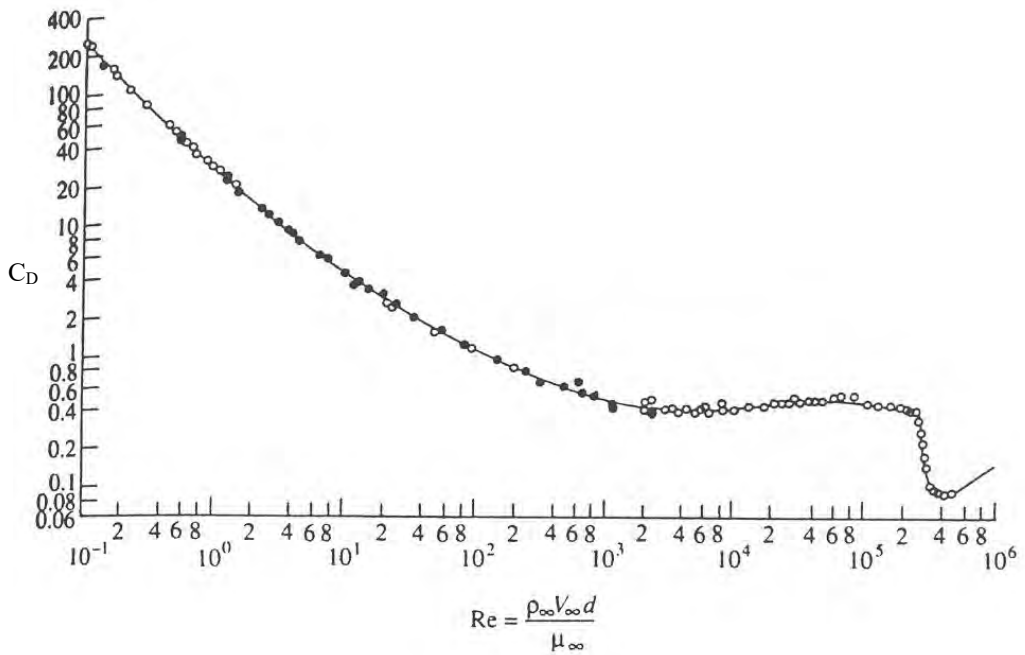
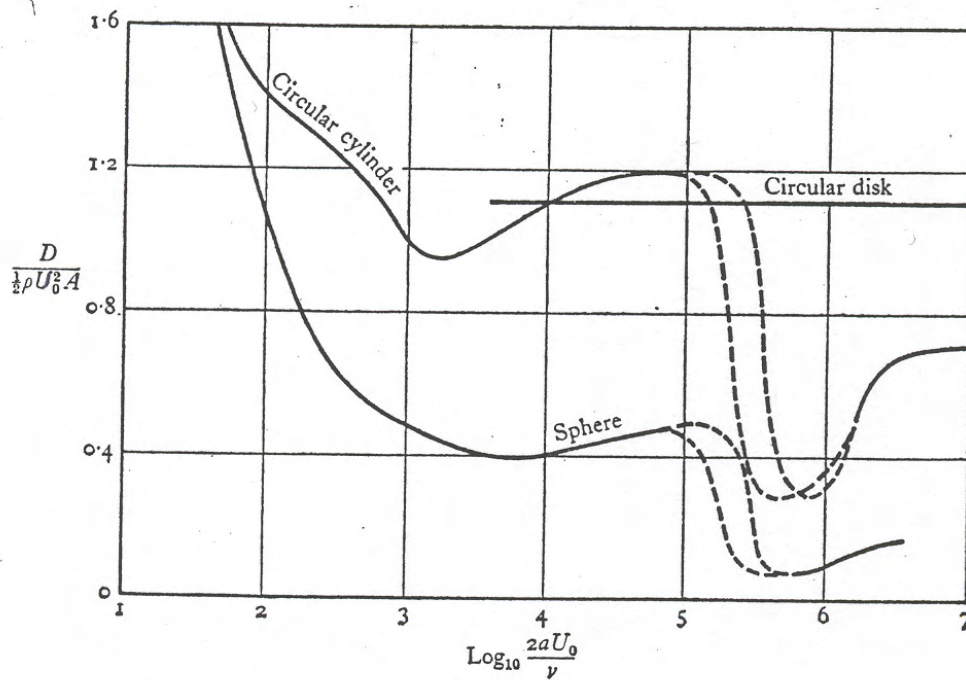
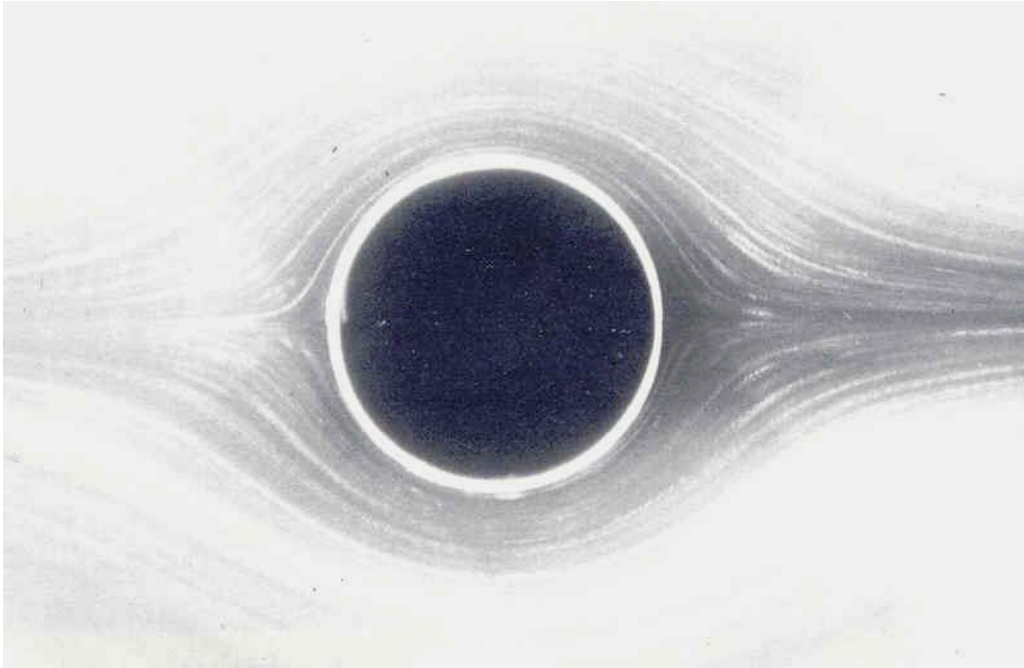


Grafico C_D sfera e disco



FLUSSI A Re BASSI ($Re < 10^3$)



Cilindro circolare immerso in un flusso stazionario uniforme ad un $Re < 1$ ($Re = 0.16$)



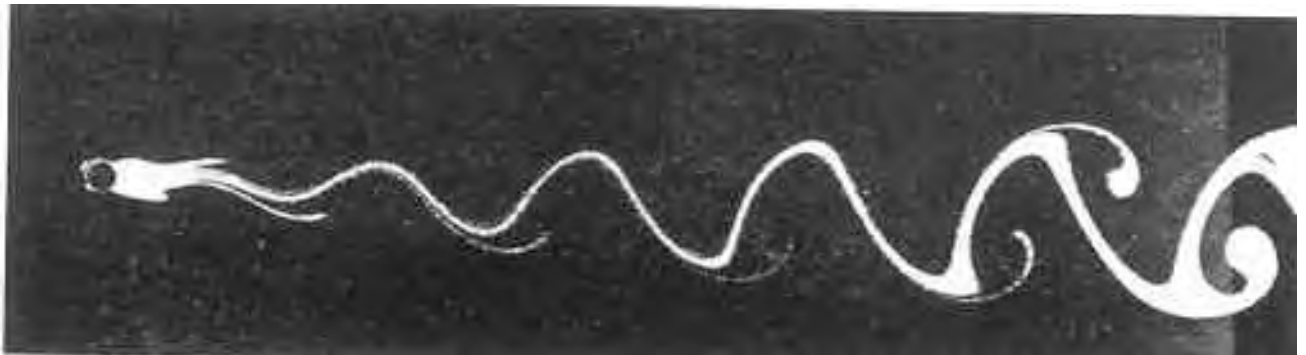
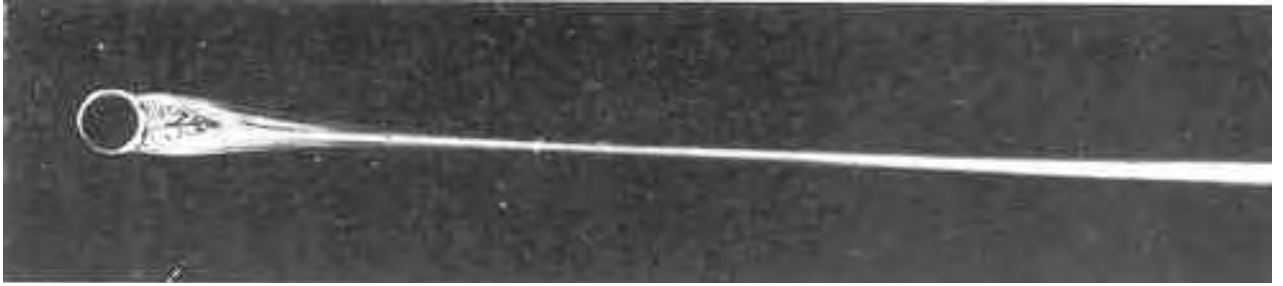
Cilindro circolare immerso in un flusso stazionario uniforme ad un $Re = 37.7$



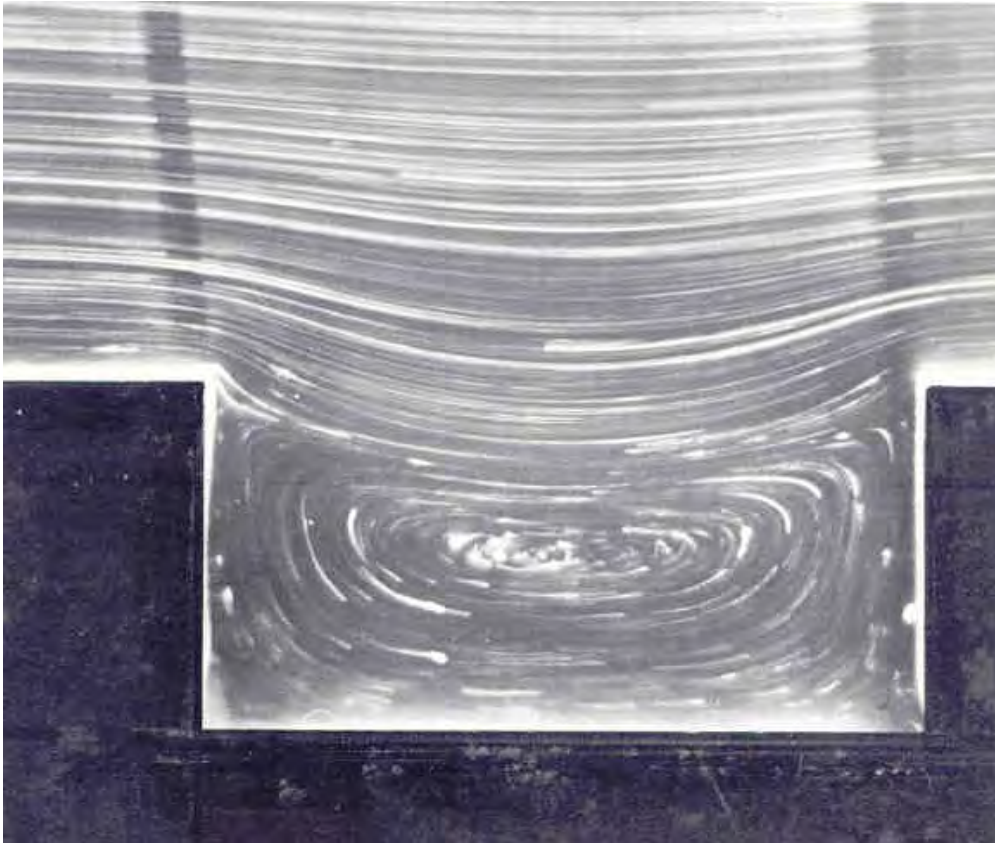
Cilindro circolare immerso in un flusso stazionario uniforme ad un $Re=73.6$



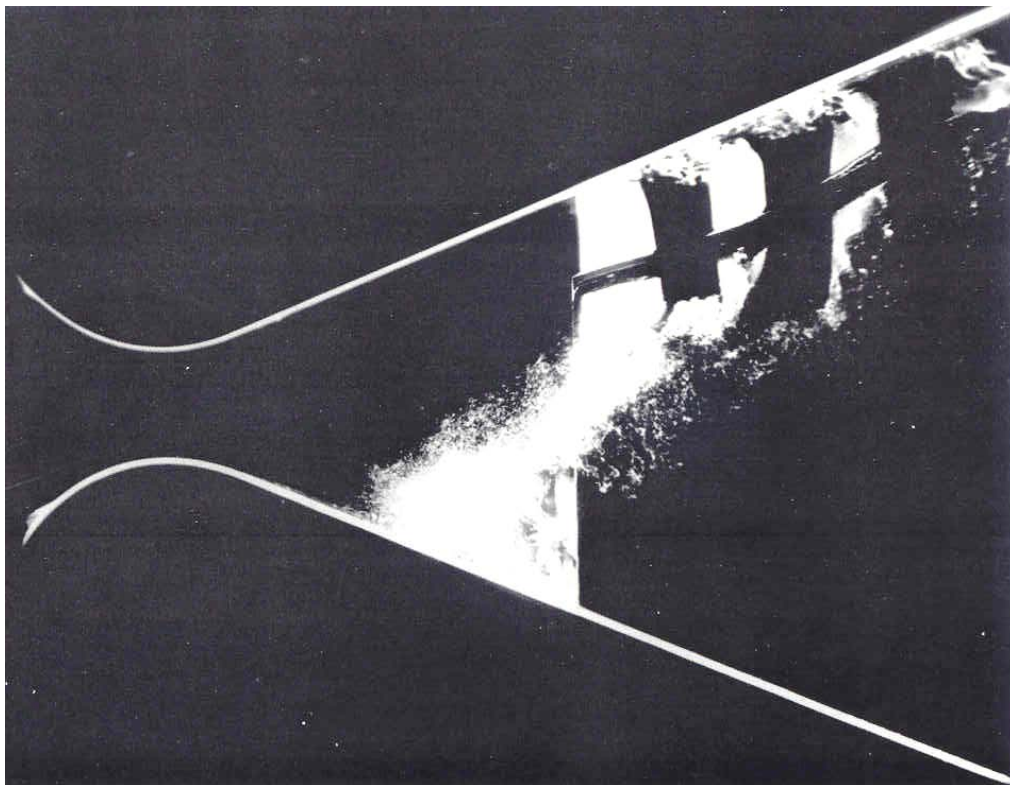
Cilindro circolare immerso in un flusso stazionario uniforme ad un $Re=133$



Vortici di Von Karman e linee di fumo nella scia di un cilindro rispettivamente per $Re=32, 55, 65, 161$ (da Homann, 1936)



Linee di corrente all'interno di una cavità di altezza h e lunghezza b ($b/h=2$). Il numero di Reynolds basato sull'altezza della cavità è $Re=0.01$.



Flusso separato in un diffusore che mostra uno strato limite turbolento attaccato alla parte superiore della parete ma staccato lungo la parete inferiore.

FLUSSI A Re ELEVATI ($10^3 < Re < 10^6$)

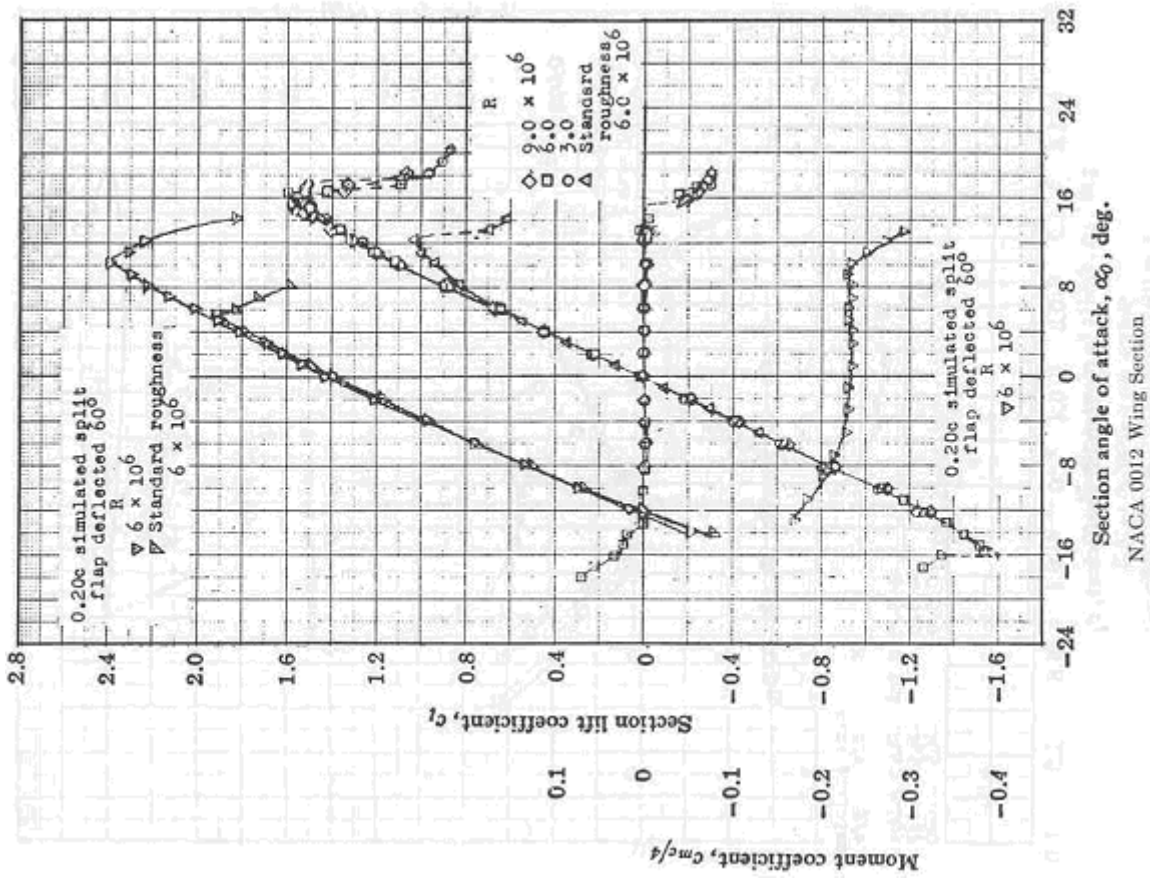


Flusso attaccato

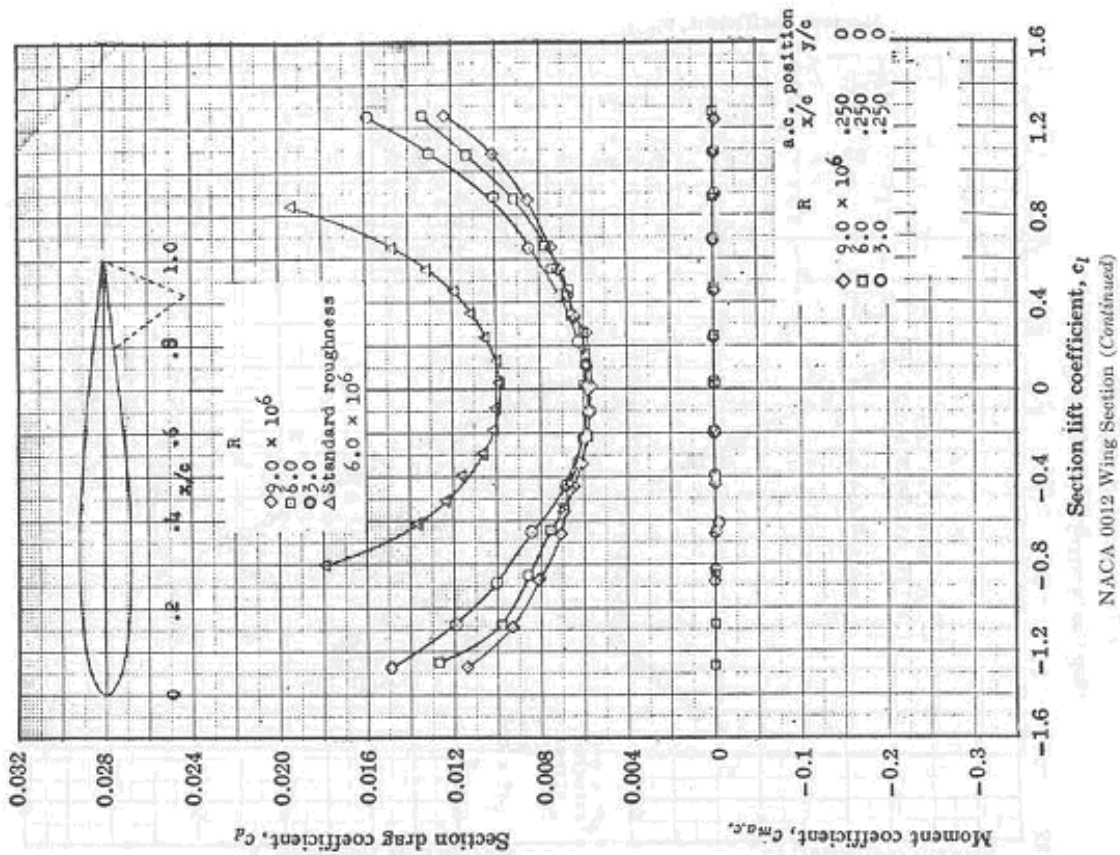


Flusso staccato (stallo)

FLUSSI A Re MOLTO ALTI ($Re > 10^6$) NACA0012 da ABBOT



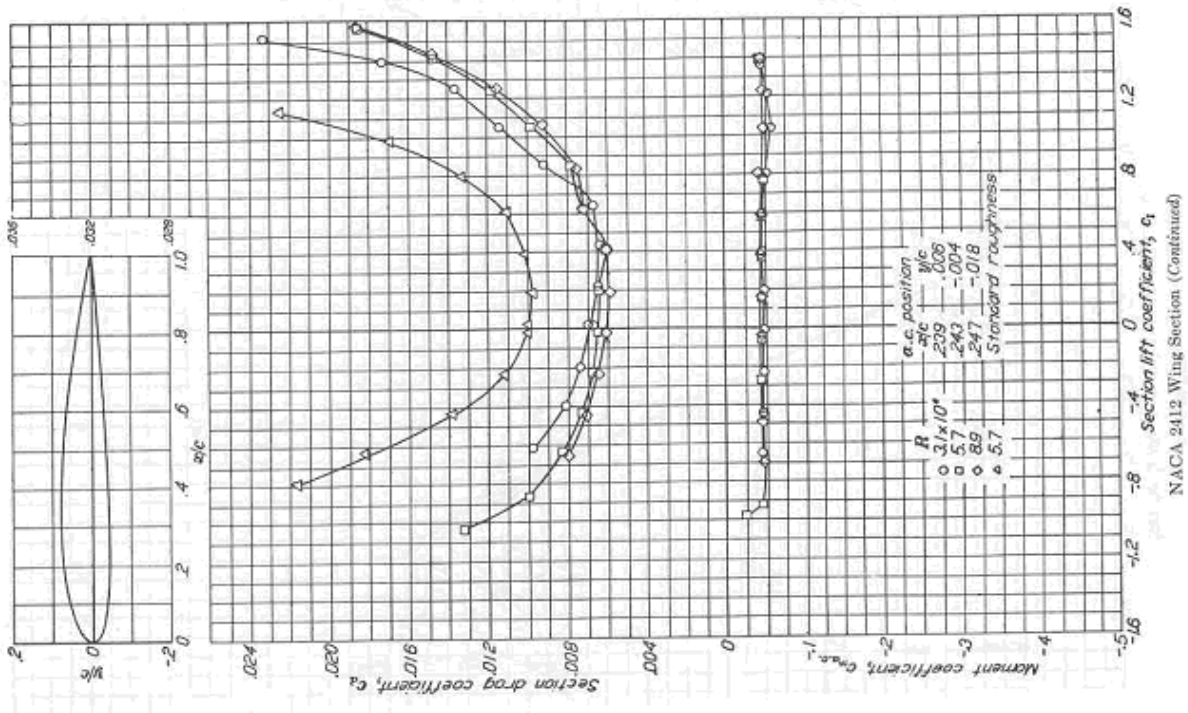
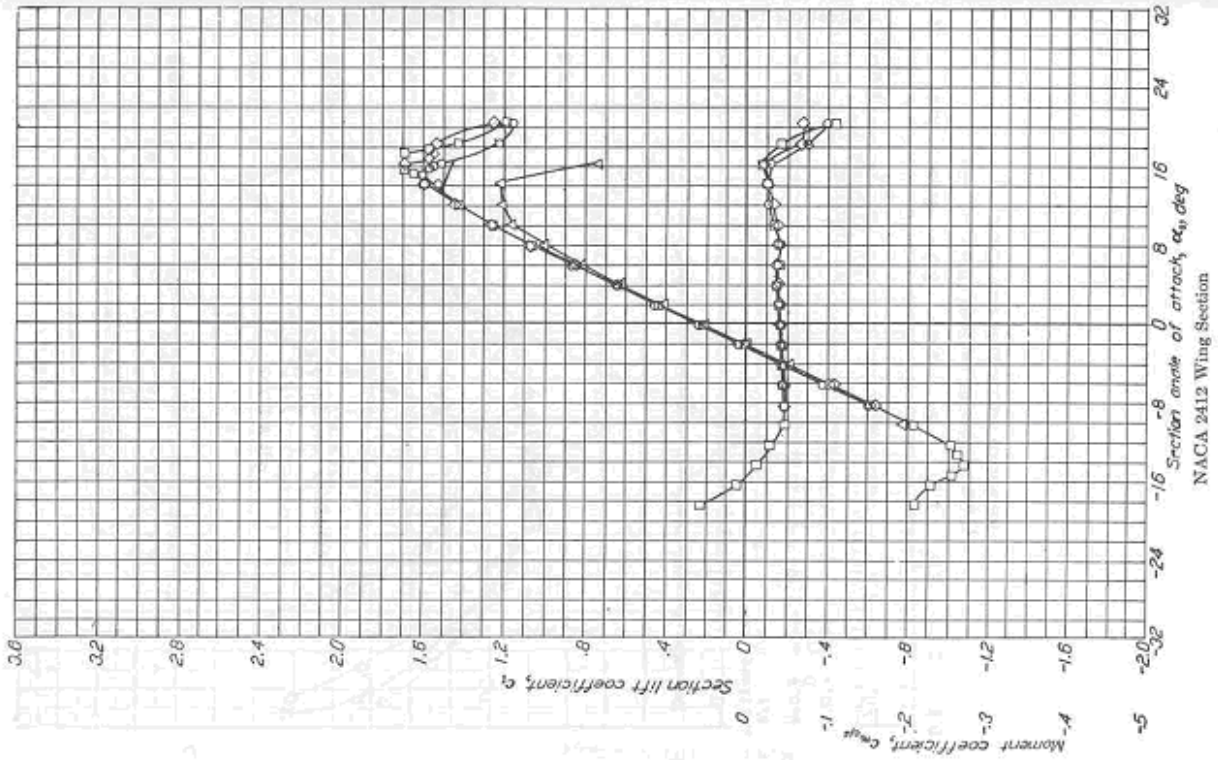
NACA 0012 Wing Section



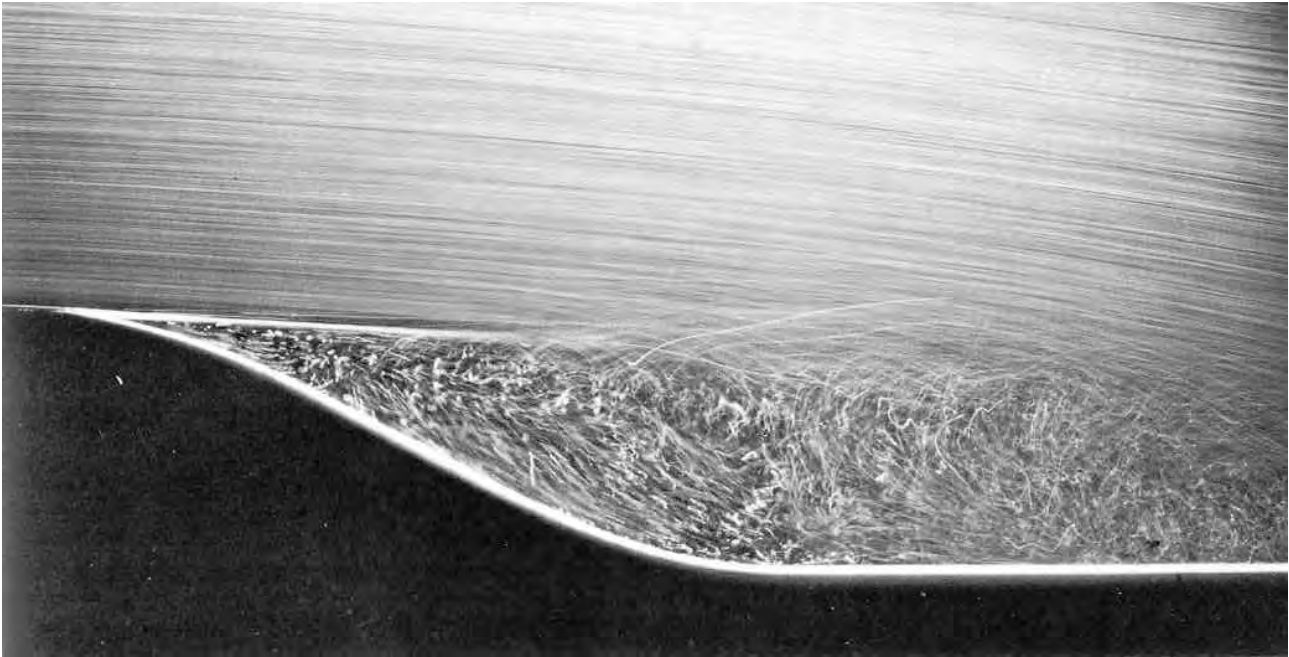
NACA 0012 Wing Section (Continued)

Sezione di un profilo alare NACA 0012

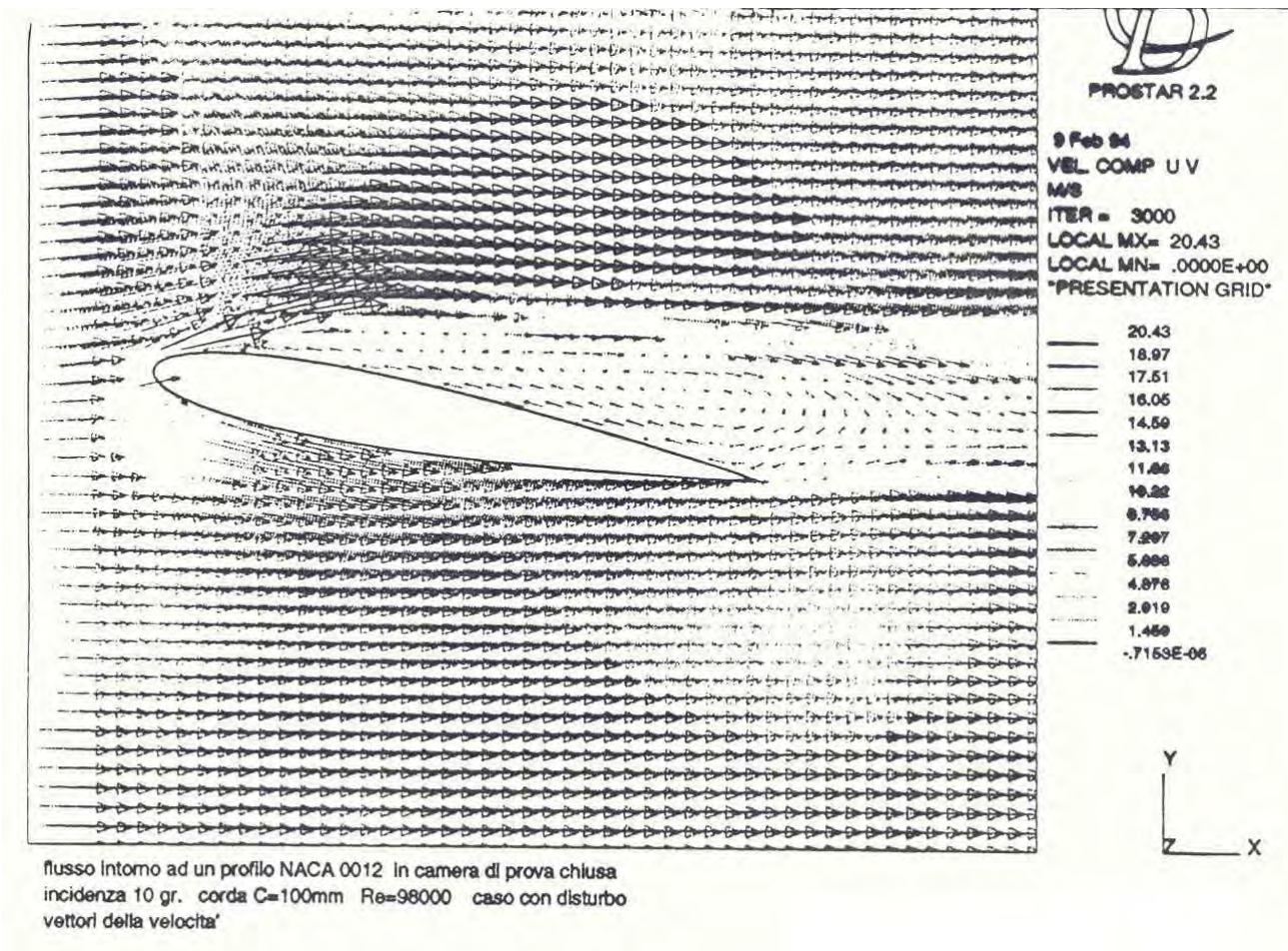
FLUSSI A Re MOLTO ALTI ($Re > 10^6$) NACA2412 da ABBOT



Sezione di un profilo alare NACA 2412

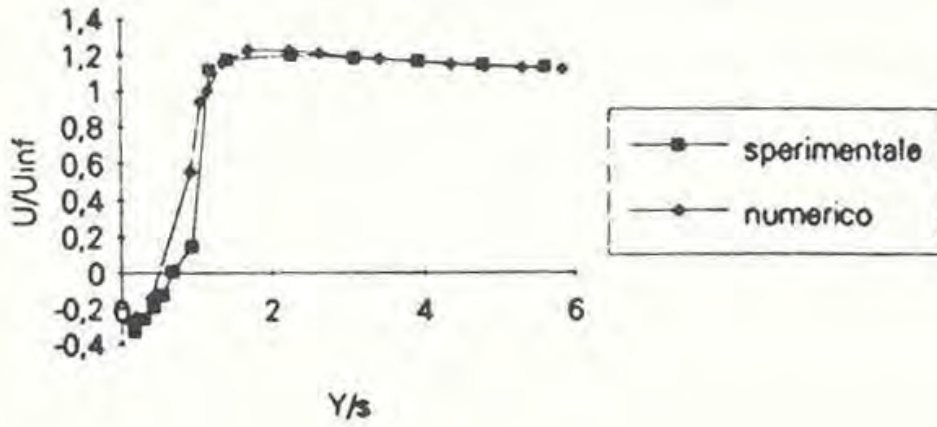


Distacco da una parete (ad esempio potrebbe essere la parete di un diffusore mal progettato) per numeri di Reynolds alti: il Re , che in questo caso è basato sulla distanza dal bordo d'attacco (non mostrato in figura), è di circa 20000.

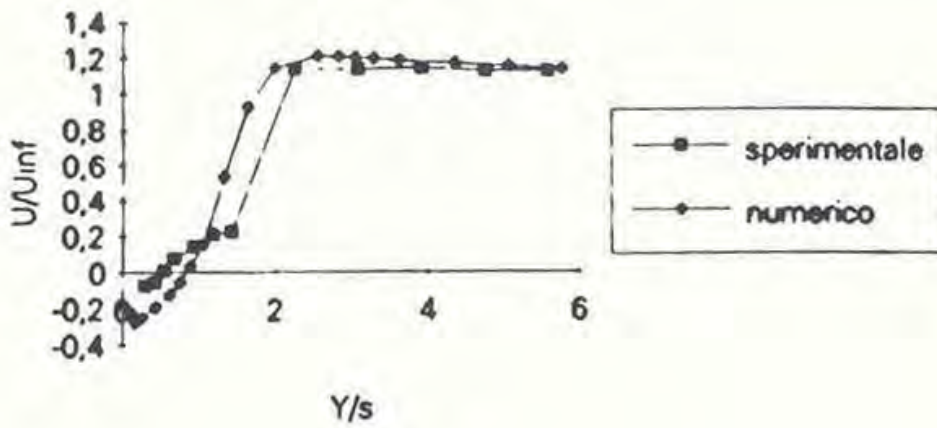


Flussi intorno ad un profilo in prossimità del bordo d'attacco (Profilo alare NACA 0012, $Re=98000$, angolo d'incidenza 10° , corda=100mm).

incidenza 10 gr. $X/C=50\%$ $C=100\text{mm}$ flusso
staccato

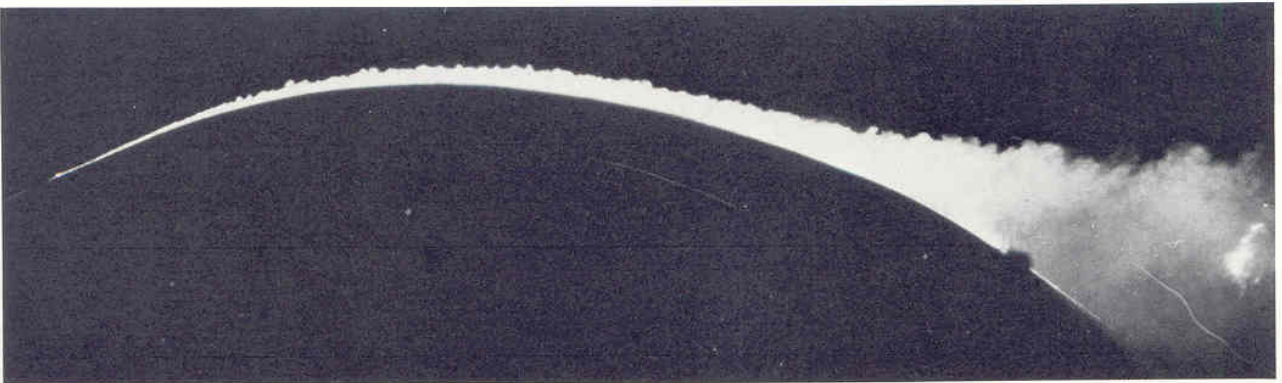
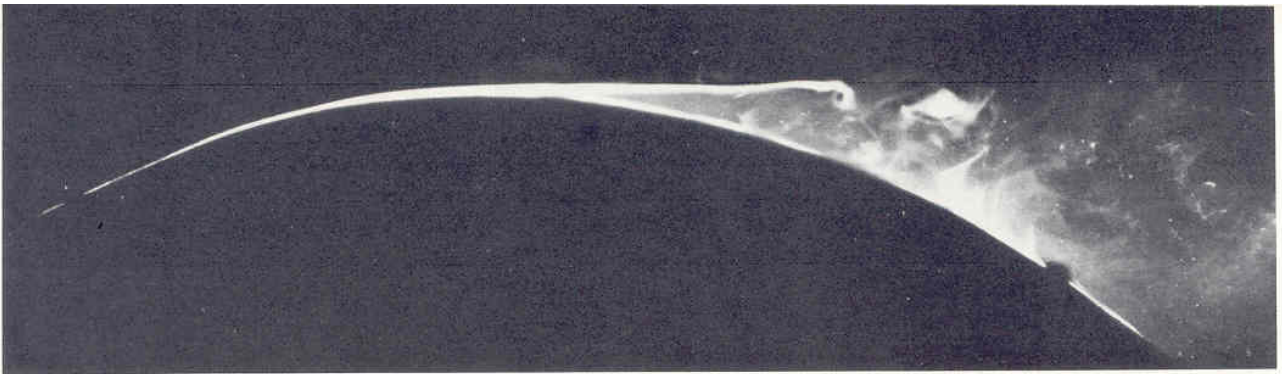


incidenza 10gr. $X/C=70\%$ $C=100\text{ mm}$ flusso
staccato

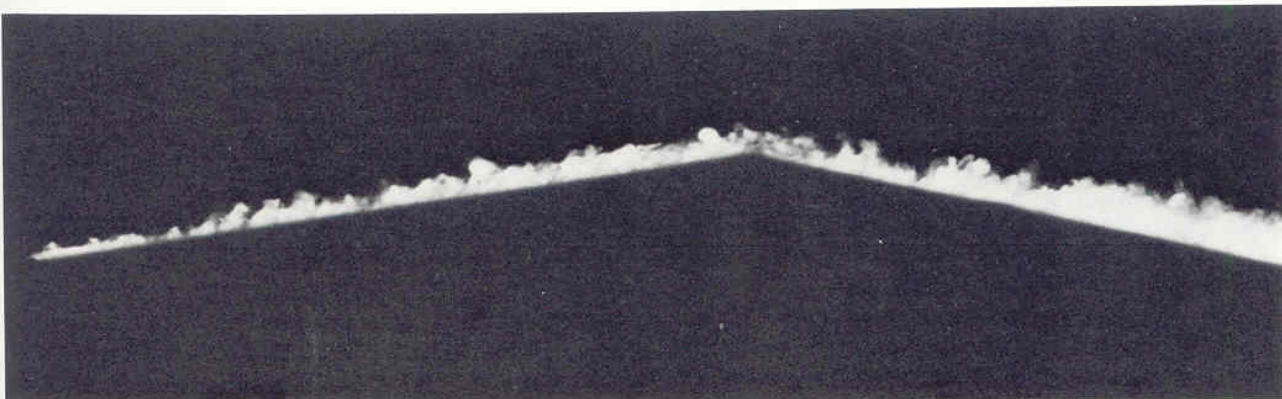
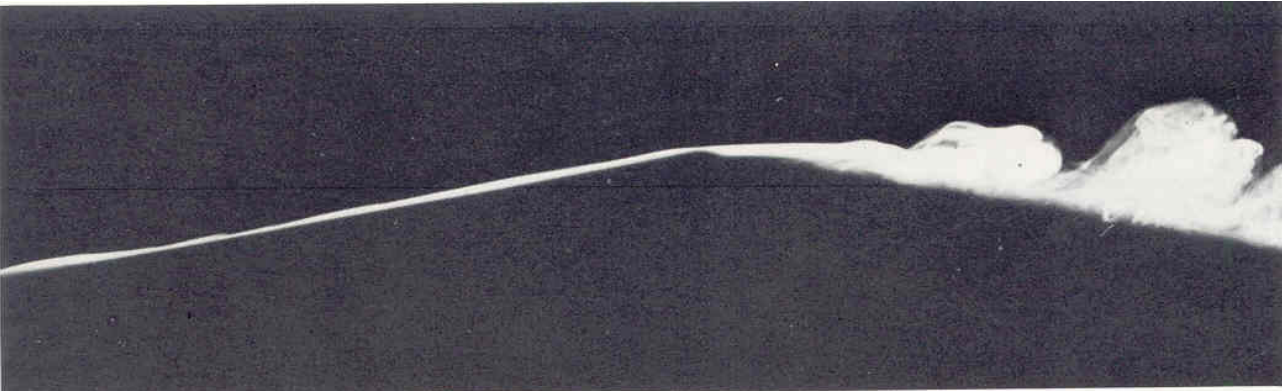


Validazione sperimentale di codici Navier-Stokes per profili alari NACA 0012

Confronto tra strato limite laminare a bassi di Re e turbolento ad alti Re



Strato limite laminare che subisce una separazione dal bordo di una superficie convessa

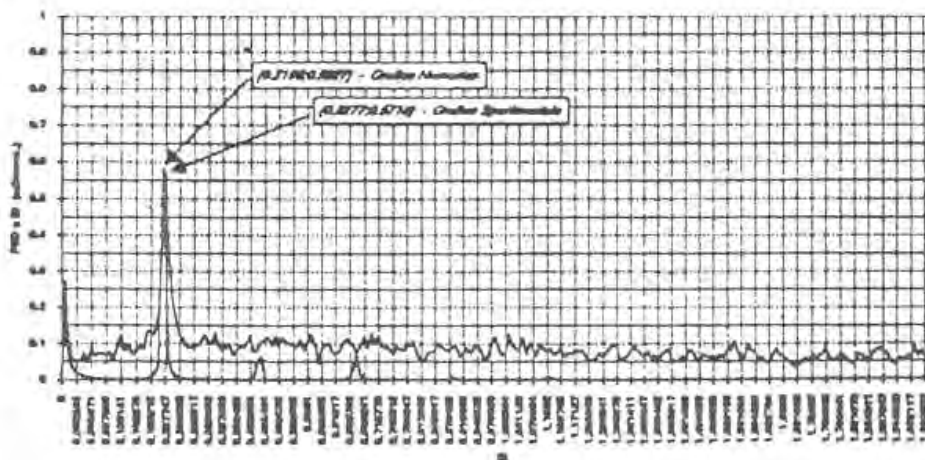
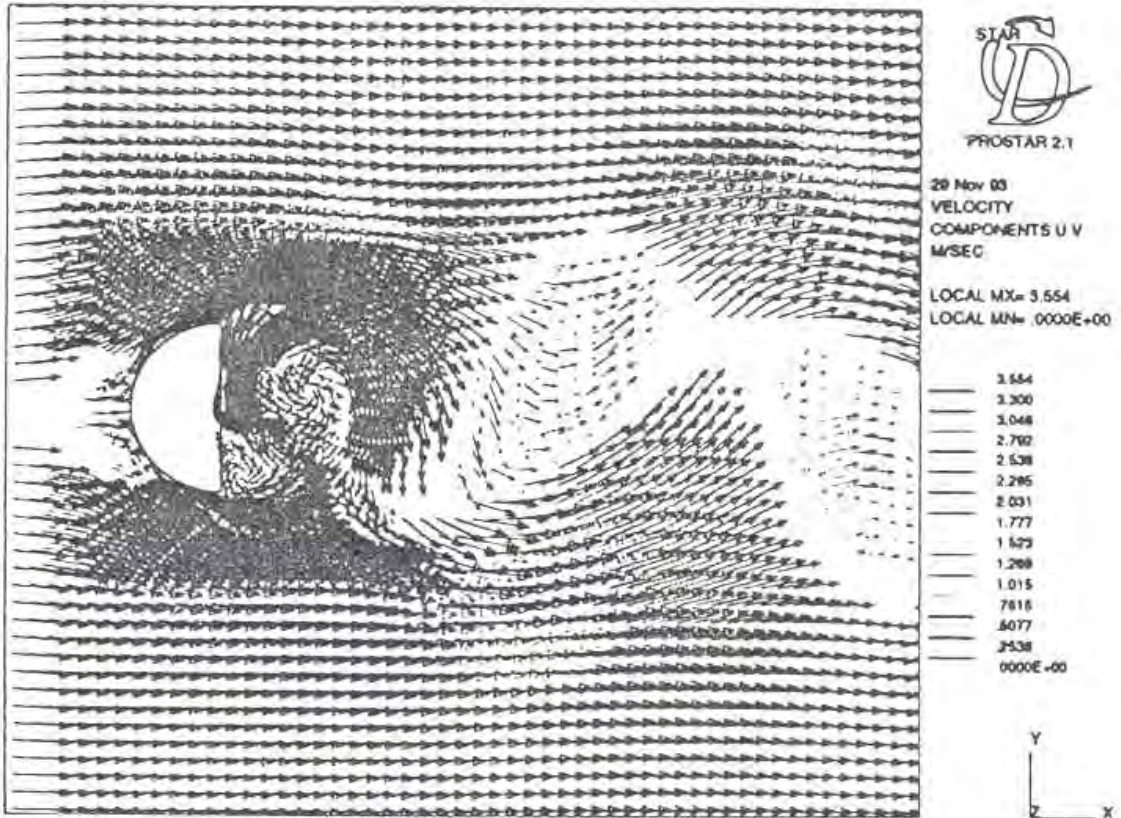


Strato limite turbolento che rimane attaccato

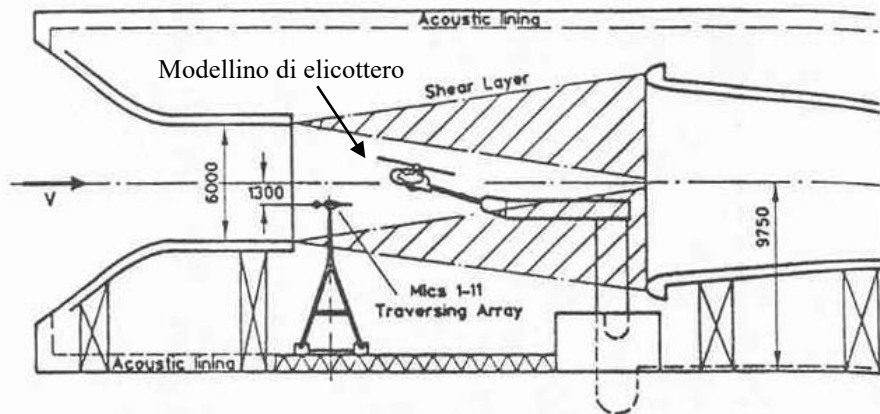
■ Numero di Strouhal – flussi non stazionari

Flusso a valle di specchietti retrovisori

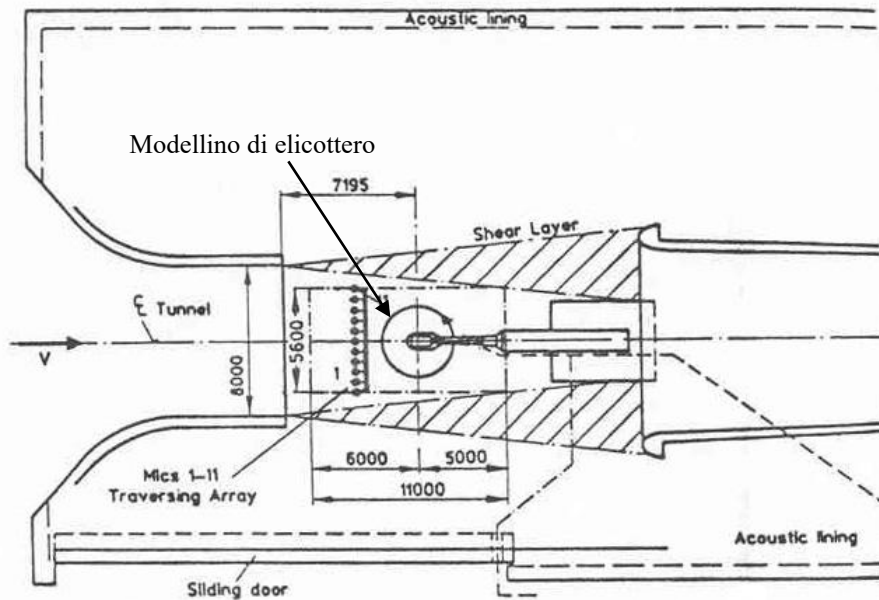
- $150 - 300 \leq Re \leq 100000 - 130000$
- Flusso non stazionario
- Laminare con distacco di scia (turbolenta)
- Tecniche usate : - Anemometria a filo caldo
- Simulazione numerica



Prove aeroacustiche per flussi non stazionarie su rotori di elicotteri (Numero di Strouhal)

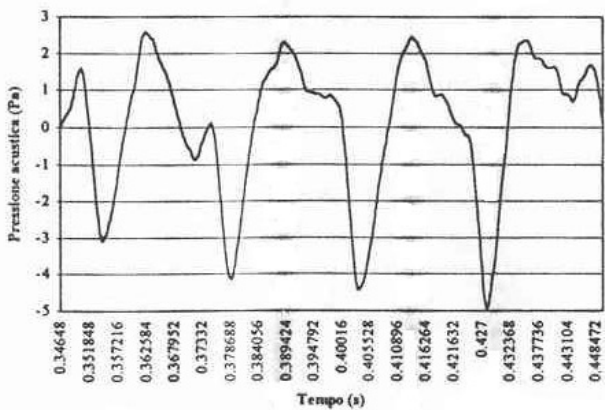
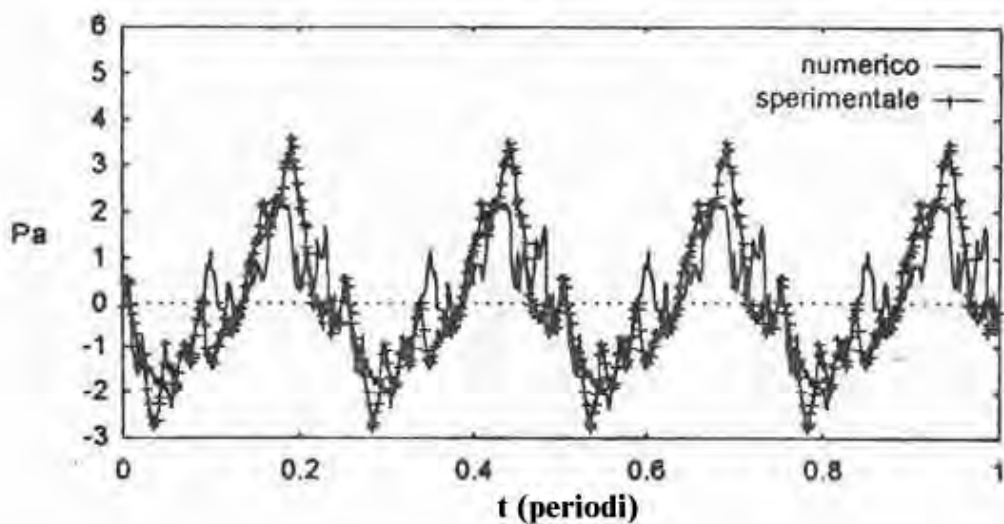
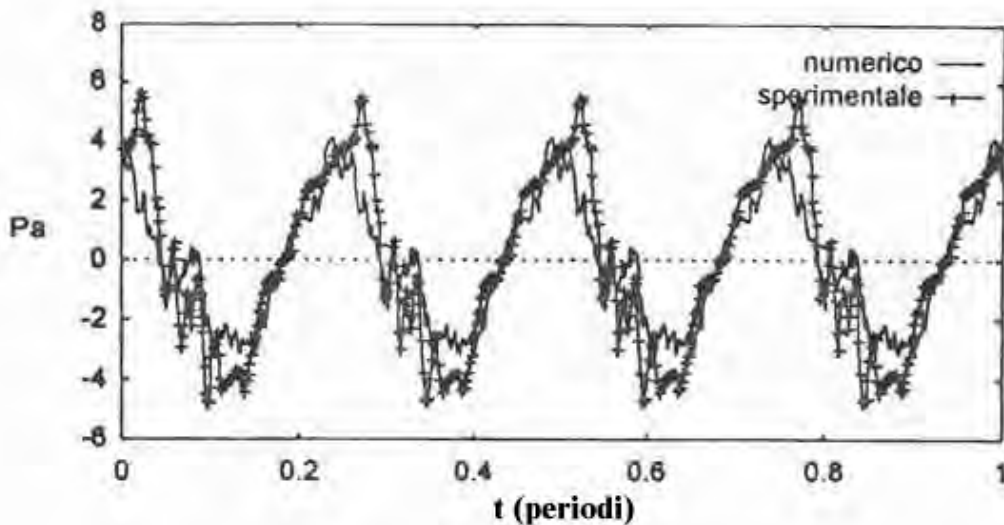


(a) Side view.

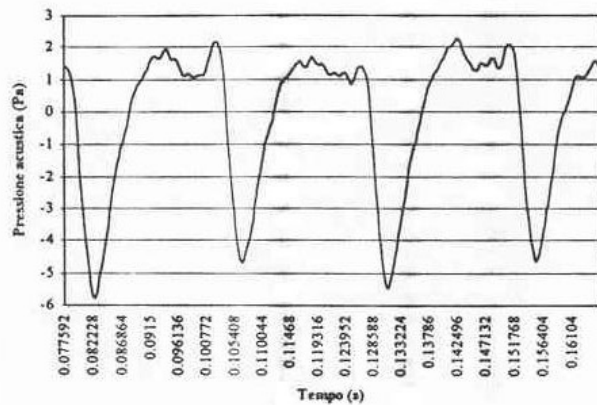


(b) Plan view.

Confronto tra il segnale sperimentale e i risultati numerici (ottenuti con i codici di calcolo HENGEO II ed HENEXIT II nel test-case in hover) per fenomeni di aeroacustica di rotori.

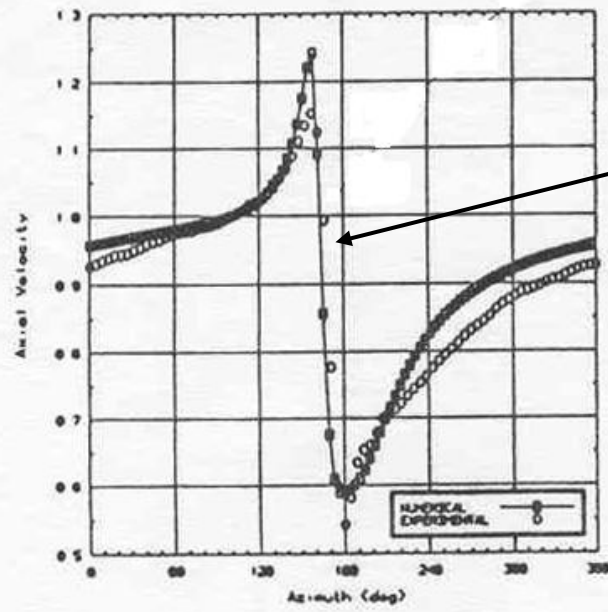


Angolo di incidenza=6°

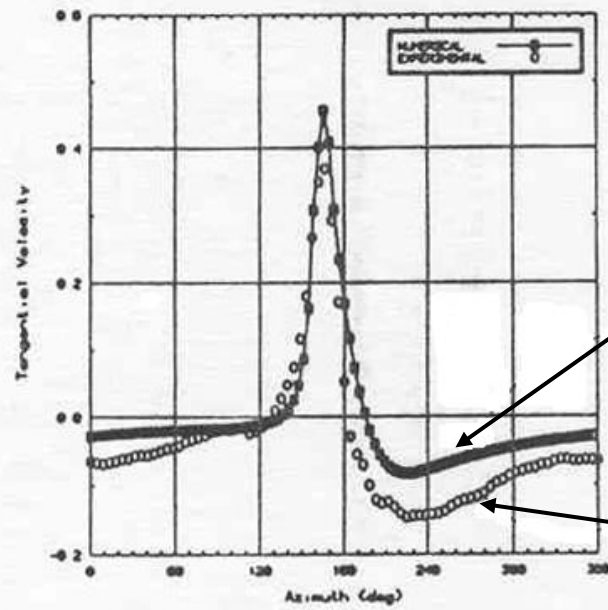


Angolo di incidenza=11°

Velocità assiale e tangenziale in scia ad una pala di un rotore eolico.
Si vede distintamente la velocità indotta dal vortice aderente alla pala.



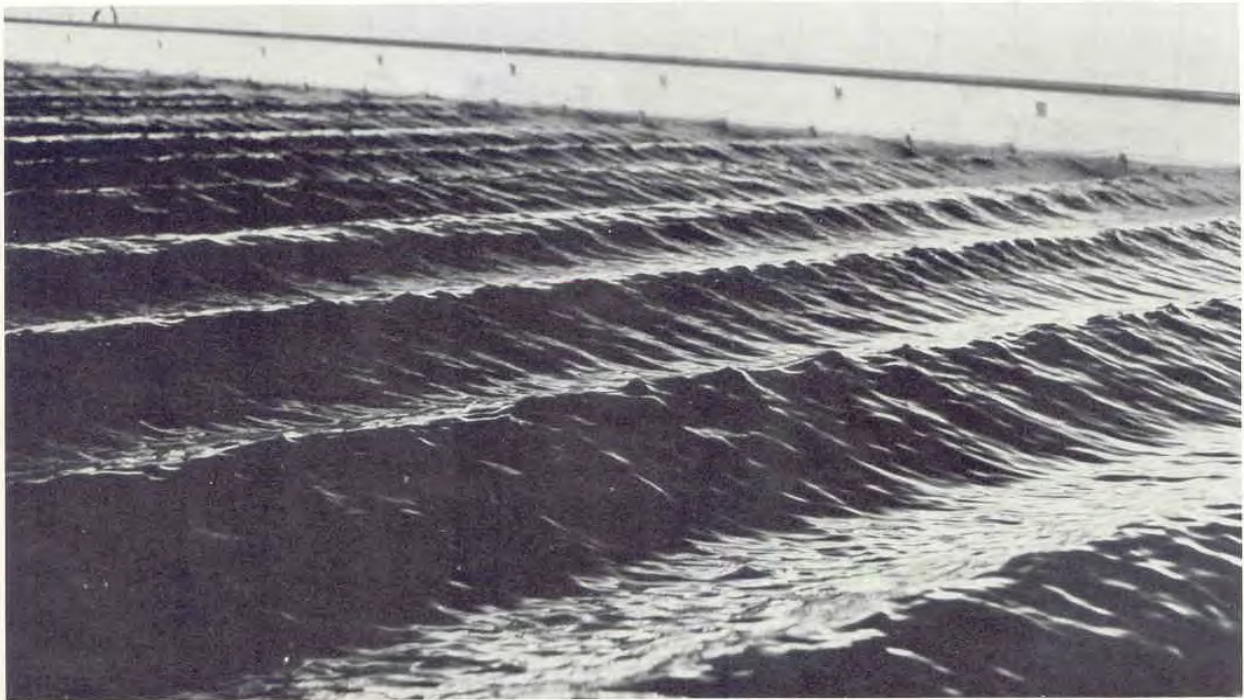
Vortici di Rankine
aderenti alle pale



Metodo dei pannelli

Anemometro a filo caldo

■ **Numero di Froude– flussi a superficie libera – navi - barche**
Prove in Vasca Navale (Numero di Froude)



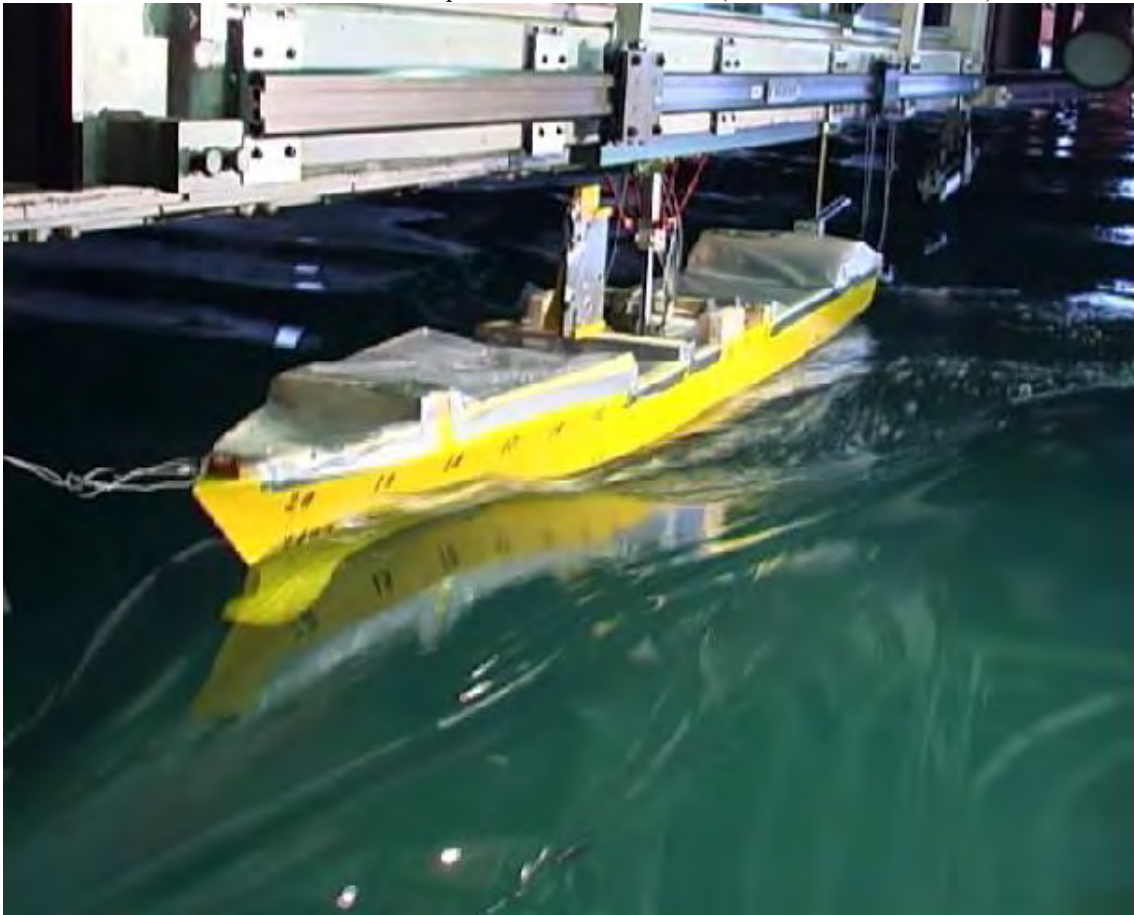
Disintegrazione di un treno di onde di Stokes: nella foto superiore si nota come una piastra oscillante genera un treno di onde piane regolari in acqua (sia in altezza che in lunghezza) le quali subiscono poi, ad esempio a circa 60 m, una drastica distorsione (la foto inferiore).

Vari esempi di onde governate dal numero di Froude:





Modello in Vasca Navale in presenza di moto ondoso (INSEAN, Vasca Navale)



Modello che manovra in campo di prova (INSEAN, Vasca Navale) e nave reale in mare aperto.



Modello in bacino di prova (INSEAN, Vasca Navale) e nave reale in mare calmo (scafo con bulbo).



Modello in bacino di prova (INSEAN, Vasca Navale) e nave reale in mare calmo (scafo planante).



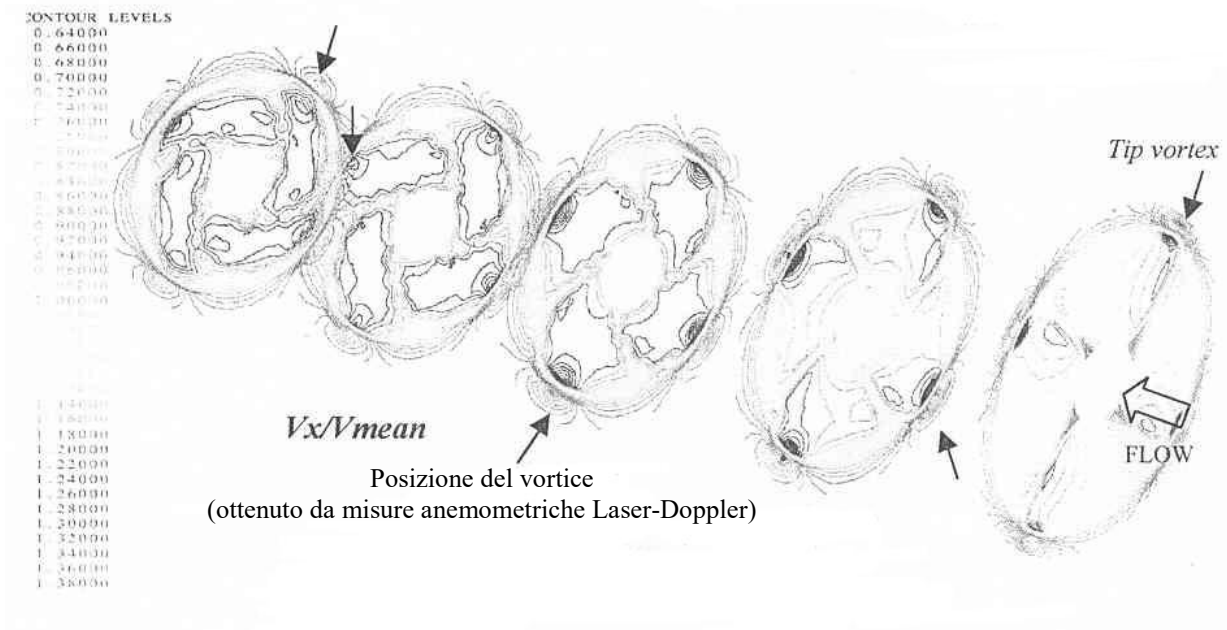
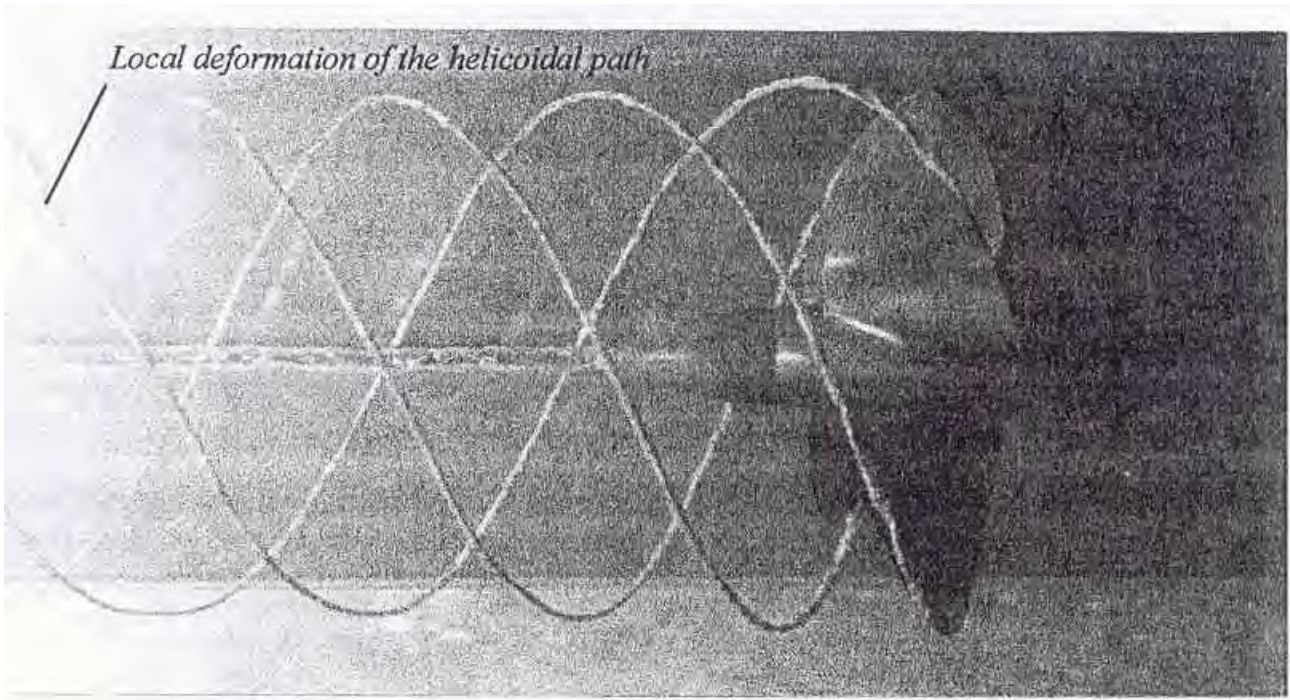
■ Numero di Ruark– Cavitazione

Effetti di cavitazione (Indice di cavitazione), Pressione imposta troppo piccola rispetto alla pressione dinamica (effetto del numero di Ruark)

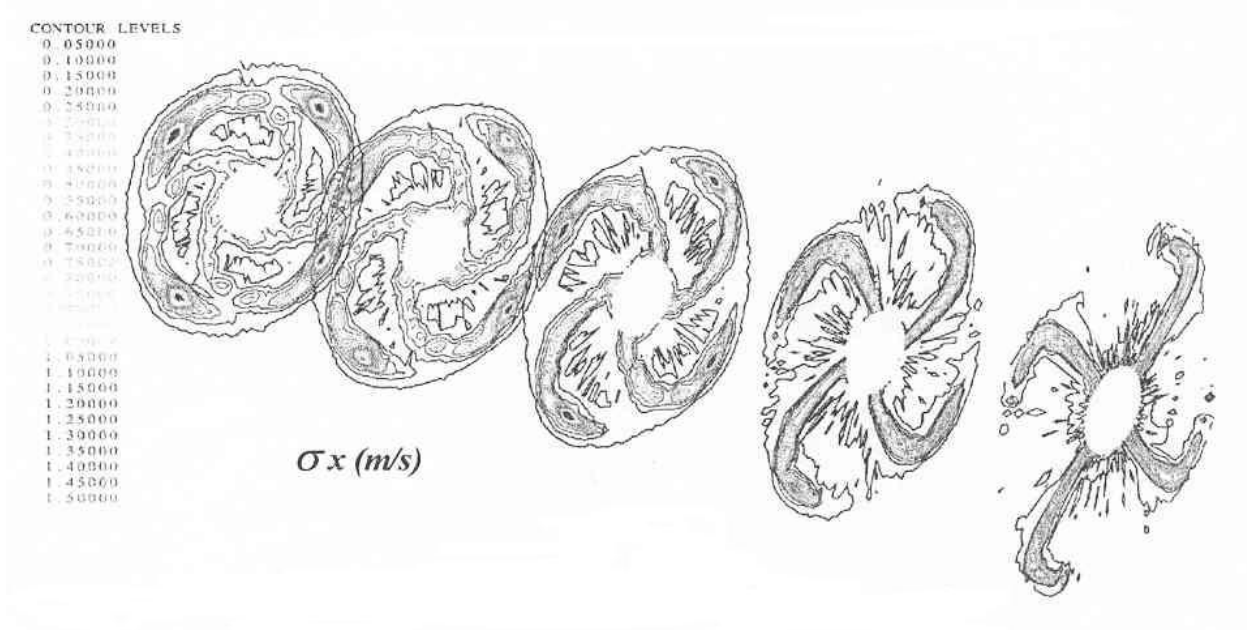
Visualizzazione delle strutture vorticosi che il mozzo e le pale rilasciano nella scia di un'elica navale.

$$(J = \frac{St}{r} = \frac{V_{\infty}}{nd} = 0.62)$$

La cavitazione (in questo caso) è utilizzata per visualizzare i vortici.



Distribuzione della velocità media assiale nella vicinanza della scia.



Distribuzione delle fluttuazione della velocità assiale nella vicinanza della scia.

■ Numero di Gr . Flussi a convezione naturale o forzata :

Il Gr è importante nelle simulazioni in scala solo quando non sono presenti altre forzanti esterne o quando le velocità in gioco sono estremamente piccole in quanto, in tal caso, la forza di galleggiamento prodotta dai gradienti di temperatura pur avendo valori limitati è comunque significativa rispetto alle altre forze in gioco (inerzia, pressione e viscosità).

Il ruolo è giocato dal rapporto Gr/Re^2 :

Per $\frac{Gr}{Re^2} < 1$: convezione forzata. La dinamica non è influenzata dal campo di temperatura, ma influenza il campo di temperatura.

Per $\frac{Gr}{Re^2} \gg 1$: convezione naturale. Il campo termico determina il campo di velocità, che a sua volta modifica il campo termico.

Per $\frac{Gr}{Re^2} \approx 1$: convezione mista. Il campo termico influenza la dinamica ed il campo di velocità influenza la termodinamica.

Spesso compare il numero di Rayleigh (Ra)

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g\beta \Delta T L^3 \rho^2 c_p}{k\mu}$$

Convezione naturale e forzata, effetto del numero di Grashof
Esempio di convezione naturale tra cilindri



$e=0$



$e=0.25$

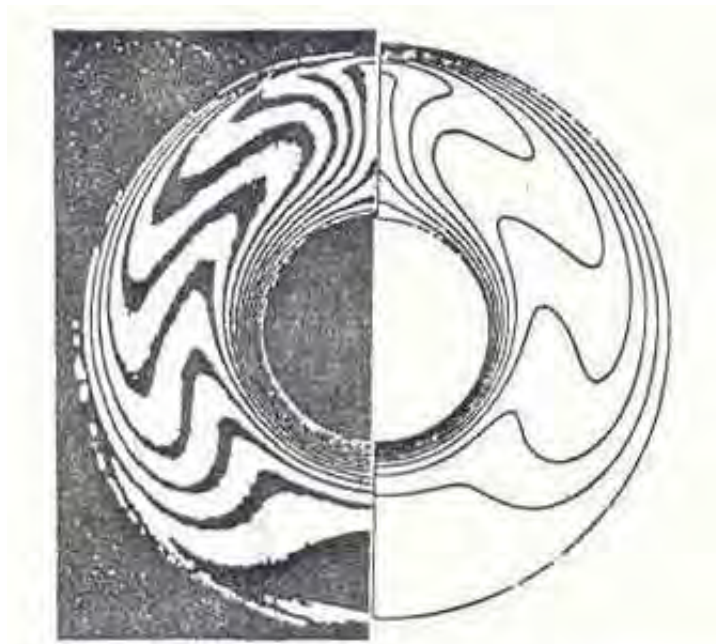


$e=0.5$

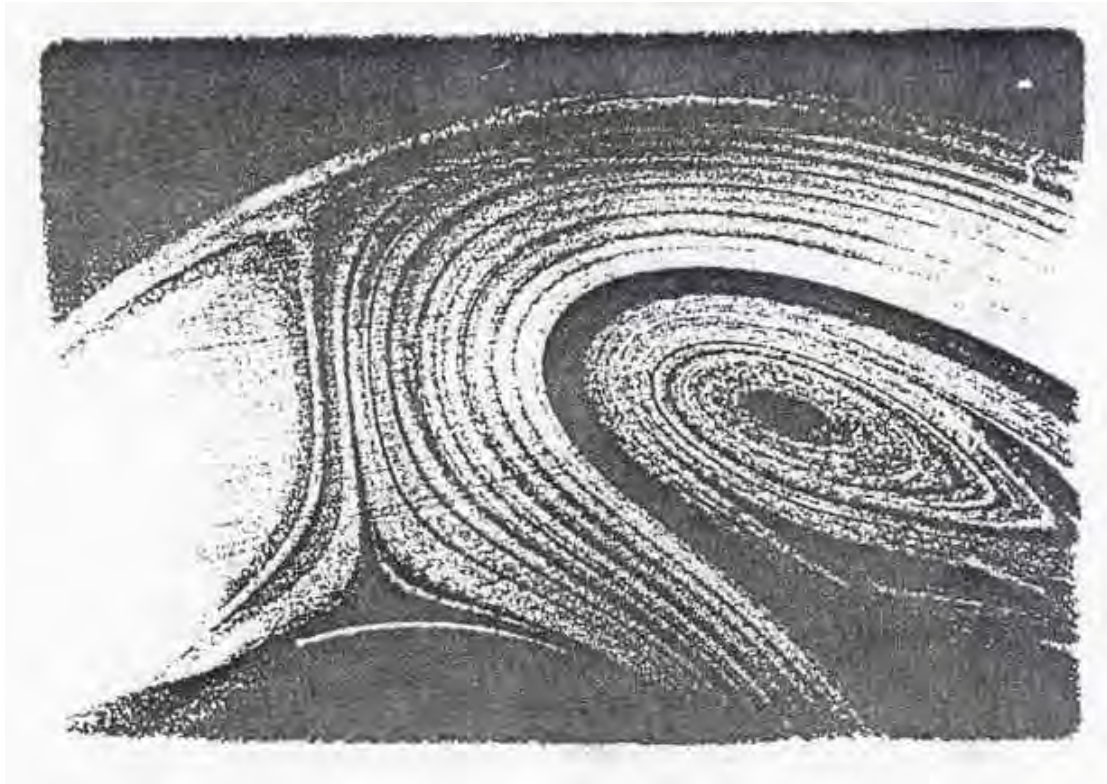


$e=0.75$

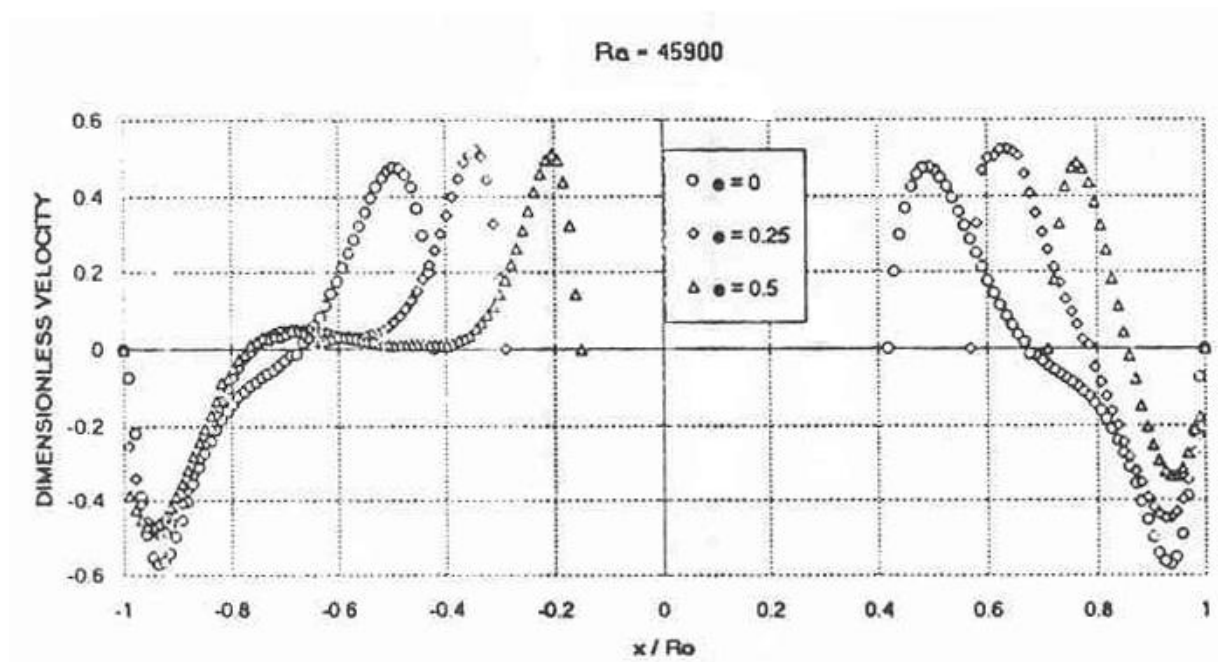
Cilindri eccentrici a diversa eccentricità: esperimenti per $Ra=45900$.



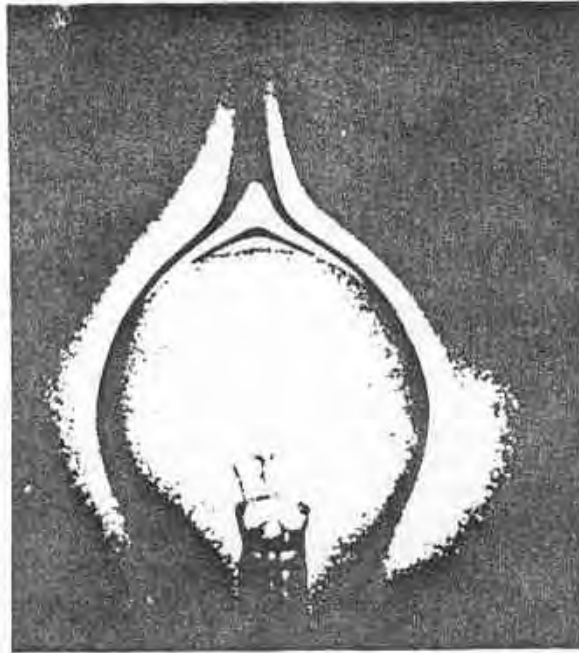
Confronto numerico-sperimentale delle isoterme a $Ra=45900$.



Linee di fumo a $Ra=45900$ sul cilindro eccentrico della figura precedente.



Andamento della velocità in funzione dell'eccentricità "e" a $Ra=45900$ sul cilindro eccentrico della figura precedente.



Campo di densità all'interno e all'esterno del bulbo di una lampadina calda ottenuto mediante interferometro di Mach-Zehnder.

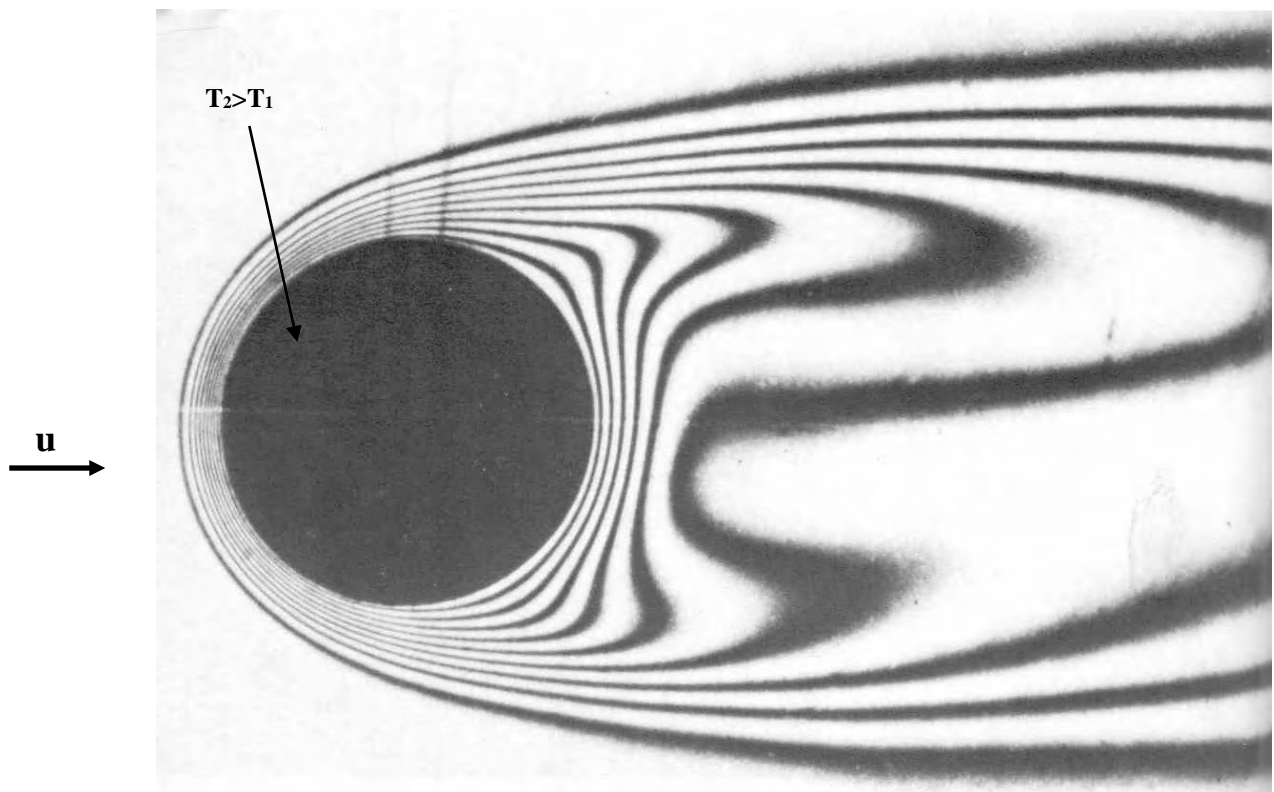


Campo di densità all'interno e all'esterno del bulbo di una lampadina calda ottenuto mediante interferometro Holografico.



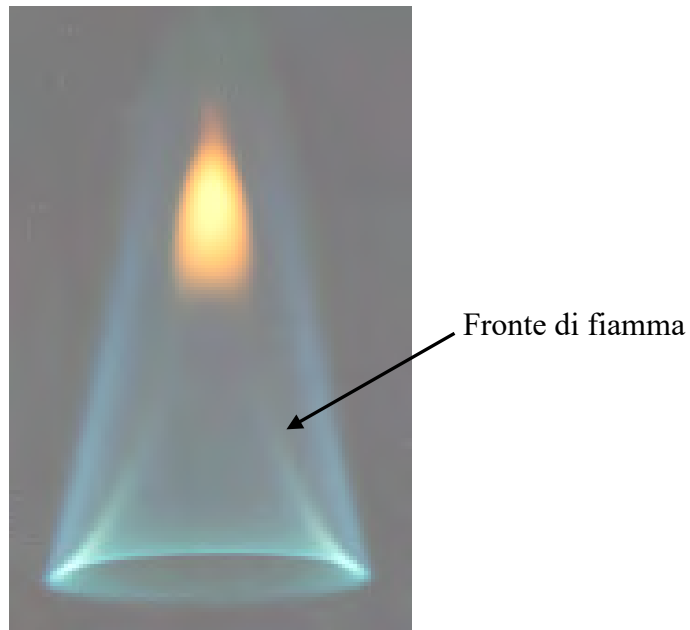
Esempio di instabilità dovute a convezione naturale all'interno di una scatola rettangolare in cui l'uniforme calore della parete inferiore produce dei vortici paralleli al lato più corto della scatola (classica convezione di Rayleigh-Bénard).

Esempio di convezione forzata



La figura, ottenuta mediante analisi interferometrica, mostra le isoterme di un cilindro raffreddato in una corrente ($Re=120$).

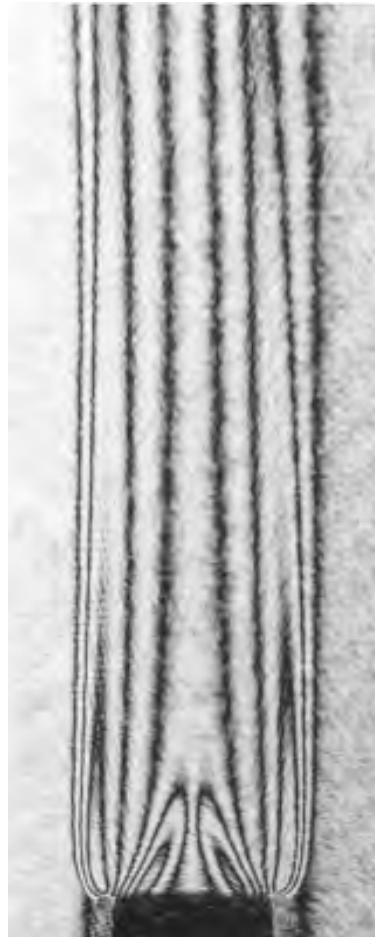
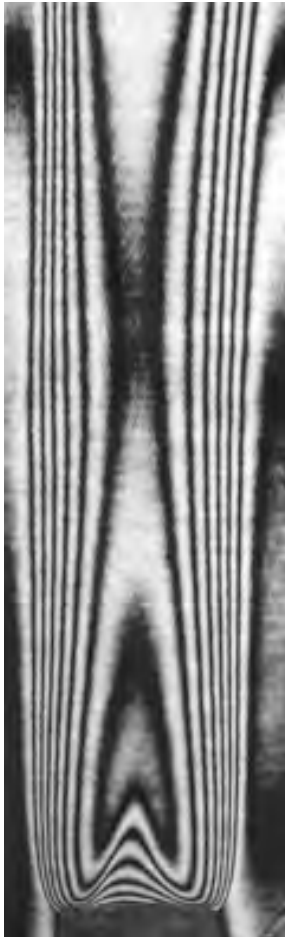
Convezione forzata- becco Bunsen Esempio di studio del “fronte di fiamma”



Fiamma premiscelata di propano (C_3H_8) per $Re=600$, $Ri=3$ e rapporto di equivalente $\phi=1.1$.

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad \Phi = \frac{(F/O)}{(F/O)_{Stech}} \quad \text{con} \quad F = \text{portata massica del combustibile (F =fuel)}$$

$O = \text{portata massica di ossidante (O =oxidizer)}$



Visualizzazioni interferometriche: quella di sinistra è una RBI, mentre quella di destra è una SI.