

Capitolo 6

Flussi compressibili non viscosi

6.1 Generalità

Abbiamo già visto al Cap. 1.3 le relazioni termodinamiche e le definizioni di quantità quali calori specifici, compressibilità, velocità del suono, numero di Mach. Alcune vengono riassunte qui di seguito per comodità:

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad (6.1)$$

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

$$Ma = \frac{u_\infty}{c} \quad (6.2)$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)} ; \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (6.3)$$

Inoltre per trasformazioni isentropiche:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cost}$$

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{cost} \quad (1.2-6.4)$$

$$\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{cost}$$

Come detto gli effetti della compressibilità sono non trascurabili quando $Ma > 0.3$. Questa circostanza in condizione di atmosfera standard, corrisponde a circa 110 m/s e pertanto è facile verificare che $Re = \frac{u_\infty l}{\nu}$ sarà in genere dell'ordine di $10^6 \div 10^7$ e quindi va considerata come situazione asintotica per $Re \rightarrow \infty$ di flusso Euleriano.

Le equazioni di governo dei flussi **compressibili** di gas monoatomici a bassa densità, in forma **adimensionale**, sono (già viste al Cap. 3)¹:

$$\blacksquare \text{ C.M. } \quad \frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \quad (3.88-6.5)$$

■ C.Q.M.

$$\frac{1}{St} \left(\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) + \rho (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} = -\frac{1}{Ru} \bar{\nabla} P + \frac{1}{Fr} \rho \frac{\bar{g}}{|g|} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{Re} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) \quad (3.105-6.6)$$

■ B.E.T.

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T = \frac{Ec}{St \cdot Ru} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \bar{u} \cdot \bar{\nabla} P + \frac{Ec}{Re} \phi + \frac{1}{Re \cdot Pr} \nabla^2 T \quad (3.106-6.7)$$

■ E.S.

$$P = \rho T \frac{Ru}{\gamma Ma^2} \quad (3.107-6.8)$$

Le forme asintotiche per $Fr \rightarrow \infty$ e $Re \rightarrow \infty$ sono in forma **dimensionale**:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) = 0 \quad (6.9)$$

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\bar{\nabla} P \quad (6.10)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} \quad (6.11)$$

$$P = \rho RT \quad (6.12)$$

Si noti che per $Ma > 0.3$ il fluido diventa volumetricamente deformabile e quindi elastico nel senso che è in grado di propagare onde.

Come visto al cap. 1.3.4 la velocità del suono risulta circa $\frac{3}{4}$ la velocità media molecolare.

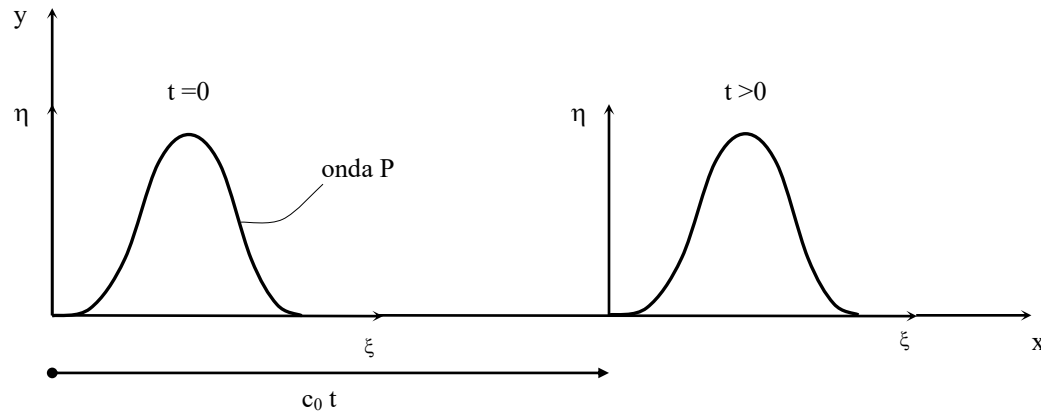
¹ Si omettono gli asterischi per semplicità.

6.2 Equazioni delle onde elastiche e Cono di Mach

6.2.1 Equazioni delle onde (*leggere*)

Sia P una grandezza che si propaga come un'onda, quindi con velocità del suono c , la sua derivata sostanziale si può approssimare con le derivate locali rispetto al tempo.

Supponiamo che la perturbazione P trasli verso destra con velocità c :



Siano x, y assi fissi, ξ e η assi mobili con l'onda:

$$(\xi, \eta) \equiv (x, y) \text{ per } t=0 \quad (6.13)$$

$$\xi = x - c_0 t, \quad \eta = y \quad (6.14)$$

quindi l'equazione dell'onda rispetto agli assi mobili è:

$$P = P(\xi) \quad (6.15)$$

quella rispetto agli assi fissi è:

$$P = P(x - ct) \quad (6.16)$$

Consideriamo il caso monodimensionale $x_i \equiv (x_1, 0, 0)$

In questo caso l'equazione delle onde risulta (equazione di D'Alambert):

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

la cui soluzione è:

$$P = P(x - ct) = P(\xi)$$

Infatti:

$$\blacksquare \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{dP}{d\xi} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \quad (6.17)$$

$$\blacksquare \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dP}{d\xi} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{d^2 P}{d\xi^2} \quad \text{da cui} \quad (6.18)$$

$$\frac{1}{c_0^2} (c_0^2) \frac{d^2 P}{d\xi^2} = \frac{d^2 P}{d\xi^2} \quad \text{c.v.d.}$$

Inoltre dalla (6.17) e (6.18) $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial P}{\partial t}$ e quindi la derivata sostanziale diventa :

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{u}{c} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} \left(1 - \frac{u}{c} \right) \quad (6.19)$$

ma poiché le velocità (u) delle particelle al passaggio delle perturbazioni sono piccole rispetto alla velocità di propagazione dell'onda (c):

$$\frac{u}{c} \ll 1, \text{ si ha :}$$

$$\frac{DP}{Dt} \approx \frac{\partial P}{\partial t} \quad (6.20)$$

analogamente :

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} \ll 1 \quad (6.21)$$

e

$$\frac{c - c_0}{c} \ll 1 \quad (6.22)$$

essendo $\rho - \rho_0$ ($c - c_0$) la densità (velocità) del mezzo perturbati dal passaggio dell'onda.

Vediamo cosa accade in un dominio 3D, le (6.9) e (6.10) linearizzate al I° ordine danno¹ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \quad (6.23)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\bar{\nabla} P \quad (6.24)$$

¹ Ad esempio $\rho = \rho_0 + \rho'$; $c = c_0 + c'$; $u = u'$ che sostituite nella (6.9) danno:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \rho_0 + (\bar{u}' \cdot \bar{\nabla}) \rho_0 + \rho_0 (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}') + \rho' (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}') = 0$$

dove il 2° e 3° termine sono nulli perché $\rho = \text{cost}$ e il 4° e 6° sono del II ordine. Con le semplificazioni si ottiene direttamente la (6.23) dove ho tolto gli apici per comodità.

Derivando la prima rispetto a t ed applicando alla seconda la divergenza :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \quad (6.25)$$

$$\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla^2 P \quad (6.26)$$

e sostituendo le seconde nelle prime:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla^2 P = 0 \quad (6.27)$$

Poiché il processo è isentropico e barotropico $\rho = \rho(P)$ e ricordando l'espressione della velocità del suono² :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (6.28)$$

e

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \approx \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (6.29)$$

da cui si ottiene :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 P} \quad (6.30)$$

che è l'equazione caratteristica delle onde di pressione. Con analoga legge si propagano le onde di densità :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 \rho \quad (6.31)$$

la (6.30) scritta in coordinate sferiche³ dà:

² Sarà chiarito successivamente

³ Si utilizzano le coordinate sferiche in quanto le onde acustiche in un dominio 3D infinito si propagano secondo r con fronti d'onda sferici. La soluzione sarà quindi a simmetria sferica nel caso di sorgente fissa e velocità del fluido nulla.

Si noti che l'espressione è equivalente all'eq. (4.18) alla quale può essere ricondotta con facili passaggi, infatti:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rP)}{\partial r^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \quad \text{C.V.D.}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (rP)}{(\partial r^2)} c_0^2 \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial^2 (rP)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (rP)}{\partial r^2} \cdot c_0^2 \quad (6.33)$$

cioè un'equazione d'onda per $\tilde{P} = rP$. L'equazione (6.33) è lineare (ottenuta da una linearizzazione) e pertanto può essere risolta con il metodo delle funzioni di Green visto al cap.4.1.3 e 4.2. In questo caso la funzione di Green sarà diversa (equazione di Green delle onde) ma può essere ottenuta con analoghe considerazioni. Un caso particolarmente semplice ma con molto significato è quello per $c \rightarrow \infty$. Infatti la (6.30) diventa :

$$\nabla^2 P = 0 \quad (6.34)$$

che, essendo formalmente uguale alla eq. (4.7), può essere risolta con la funzione di Green

$g = -\frac{1}{4\pi r}$. La (6.34) ammette una soluzione di sorgente del tipo :

$$P = \frac{f}{4\pi r} \quad (\text{come visto all'eq. 4.20}).$$

Ritornando alla (6.33), si può scrivere:

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial r^2} \quad (6.35)$$

questa risulta analoga alla (6.30) monodimensionale:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (6.30.a)$$

ma questa è identicamente risolta dalla (6.16), infatti:

$$c_0^2 \frac{d^2 P}{d\xi^2} = c_0^2 \frac{d^2 P}{d\xi^2}$$

che pertanto è soluzione dell'equazione delle onde nel caso monodimensionale:

$$P(\xi) = P(x - c_0 t) \quad (6.16)$$

La soluzione della (6.33) in termini di \tilde{P} sarà uguale alla (6.16) in quanto la (6.33) è ancora monodimensionale in r (coordinate sferiche). La soluzione è del tipo:

$$\tilde{P} = rP = f(r - c_0 t)$$

La funzione di Green per l'equazione delle onde è:

$$G = \frac{\delta(\tau - t + r/c_0)}{4\pi r}$$

Un segnale impulsivo arriva ad un ascoltatore (microfono) un volta ed una volta sola, con un tempo di ritardo

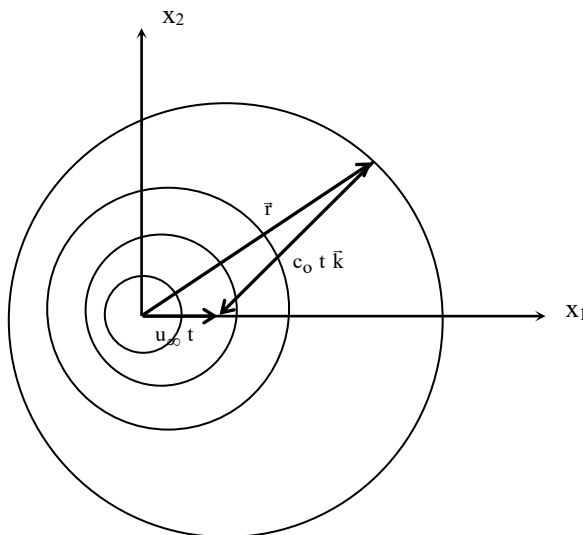
$$t = \tau + r/c_0$$

per cui il $\delta(\tau - t + r/c_0)$ tiene conto dell'effetto del ritardo in quanto l'impulso di pressione a distanza r sarà di ampiezza $1/4\pi r$, valore infinito e istante $t = \tau + r/c_0$, cioè ritardato del tempo che impiega la perturbazione a percorrere la distanza r alla velocità c_0 .

6.2.2 Cono di Mach

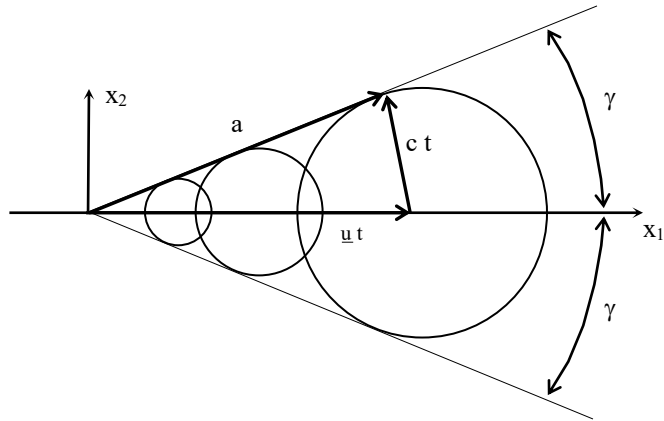
Se la sorgente è posta in una corrente con u_∞ ed è una sfera pulsante, la pressione sarà ancora costante su sfere con intensità proporzionale ad $\frac{1}{r}$ il cui centro è traslato di $u_\infty t$.

- Se la velocità è subsonica, cioè $Ma = u_\infty/c_0 < 1$



La sorgente acustica f va considerata come posta in $r - c_0 t \bar{k}$ e non in $r=0$ in quanto nel tempo t le onde sono state convette dalla corrente della quantità $u_\infty t$.

- Se la velocità è supersonica $Ma = \frac{u_\infty}{c_0} > 1$



Lo stesso ragionamento porta ad un cono di involuppo di tutte le superfici sferiche detto cono di Mach con angolo γ di semiapertura dato da :

$$c_0 t = u_\infty t \operatorname{sen} \gamma \quad (6.36)$$

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{c_0 t}{u_\infty t} = \frac{c_0}{u_\infty} = \frac{1}{Ma} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{l}{\sqrt{Ma^2 - 1}} \quad (6.37)$$

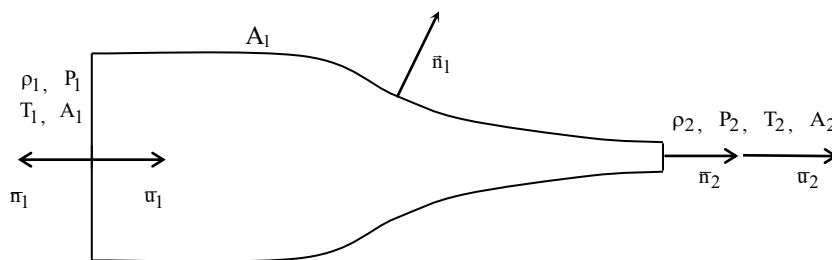
Maggiore è Ma minore è l'angolo di apertura del cono. La zona esterna al cono è detta "zona dei segnali proibiti" in quanto ivi non possono pervenire segnali acustici.

6.3 Modelli unidimensionali e quasi-unidimensionali stazionari

- Il modello quasi-unidimensionale (QU) trascura totalmente le componenti 2 e 3 della velocità ($u_2=u_3=0$, $u_1 \neq 0$) e le variazioni in x_2 e x_3 delle variabili incognite $\left(\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1} \neq 0 \right)$ e non trascura invece le variazioni di area secondo x_1 delle sezioni del condotto considerato $\left(\frac{dA}{dx_1} \neq 0 \right)$.
- Il modello unidimensionale (U) (o monodimensionale) trascura anche le variazioni di area.

6.3.1 Modello quasi-unidimensionale (QU)

Sia dato un condotto



- Eq. C. M. (6.9) con ipotesi di flusso stazionario, in forma integrale

$$\int_V \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u}) dV = 0 \quad (6.37)$$

da Green-Gauss:

$$\int_s \rho \bar{u} \cdot \bar{n} dS = 0$$

cioè: $A_1 u_1 \rho_1 - A_2 u_2 \rho_2 + 0 = 0$

$$A_1 u_1 \rho_1 = A_2 u_2 \rho_2 \quad (6.38)$$

$$\boxed{\rho u A = \text{cost}} \quad (6.39)$$

- Eq. C.Q.M. (6.10)

Per $Re \rightarrow \infty$, $Fr \rightarrow \infty$, $St \rightarrow \infty$

$$\rho(\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} = -\bar{\nabla} P \quad (6.40)$$

proiettata su x :

$$\rho u \frac{d u}{d x} = -\frac{d P}{d x} \quad (6.41)$$

oppure:

$$\rho u \frac{d u}{d x} = -c_0^2 \cdot \frac{d \rho}{d x} \quad (6.42)$$

■ Eq. B.E.T. (6.11):

Si trascura per ora l'effetto della viscosità e delle sorgenti di calore

volumetrico $\left(\frac{Ec}{Re} \ll 1, \frac{l}{Re Pr} \ll 1, St \rightarrow \infty, q = 0 \right)$

$$\rho c_p (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) T = (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) P \quad (6.43)$$

proiettata su x :

$$\rho c_p u \frac{d T}{d x} = u \frac{d P}{d x} \quad (6.44)$$

sostituendo la (6.41) :

$$\rho c_p u \frac{d T}{d x} + \rho u^2 \frac{d u}{d x} = 0 \quad \text{cioè :} \quad (6.45)$$

$$\rho u \left(c_p \frac{d T}{d x} + u \frac{d u}{d x} \right) = 0 \quad (6.46)$$

questa per $\rho u \neq 0$ e $c_p = \text{cost}$ (fluido caloricamente perfetto) diventa :

$$c_p \frac{d T}{d x} + \frac{d \left(\frac{u^2}{2} \right)}{d x} = 0 \Rightarrow \frac{d \left(c_p T + \frac{u^2}{2} \right)}{d x} = 0 \quad (6.47)$$

scritta tra due sezioni dà :

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (6.48)$$

e generalizzando:

$$\boxed{c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{cost}} \quad (6.49)$$

6.3.2 Modello unidimensionale (U)

Si trascurano anche le variazioni di area, il che ha senso quando il condotto presenta sezioni pressochè costanti o quando le sezioni (A_1 e A_2) sono molto vicine e la variazione di area è continua (non ci sono discontinuità geometriche). In questo caso le (6.9) e (6.10) diventano:

■ C.M.

$$\bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u}) = 0$$

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0$$

$$\boxed{\rho u = \text{cost}} \quad (6.50)$$

■ C.Q.M.

La (6.41) tenendo conto della (6.50) diventa:

$$\frac{d(\rho u^2)}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0 \quad (6.51)$$

$$\frac{d}{dx}(\rho u^2 + P) = 0 \quad (6.52)$$

$$\rho_1 u_1^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2 \quad (6.53)$$

ovvero generalizzando

$$\boxed{\rho u^2 + P = \text{cost}}^1 \quad (6.54)$$

¹ Si noti la differenza con Bernoulli per flussi barotropici (3.72). Ciò è legato alla notevole approssimazione dovuta all'ipotesi di flusso monodimensionale, ed alla circostanza che Bernoulli vale per flussi barotropici con notevoli cambiamenti di sezione mentre la (6.54) vale per flussi altamente compressibili (anche in presenza di urti) ma con variazione di sezione nulla.

6.3.3 Effetto di Ma sul flusso compressibile nei condotti

Consideriamo un flusso stazionario-compressibile quasi-unidimensionale (QU) in un condotto a sezione debolmente variabile. Cerchiamo di valutare le condizioni di flusso in funzione dell' area della sezione A .

Dalla C.M. (6.39) si ha :

$$\rho u A = \text{cost}$$

che differenziando diventa:

$$\frac{d}{dx}(\rho u A) = 0 \quad (6.55)$$

$$\rho u \frac{dA}{dx} + \rho A \frac{du}{dx} + u A \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad (6.56)$$

dividendo per $\rho u A$:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad (6.57)$$

ricordando (6.42) che:

$$\rho u \frac{du}{dx} = -c_0^2 \frac{d\rho}{dx}$$

si ha :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \left(1 - \frac{u^2}{c_0^2} \right) = 0 \quad (6.58)$$

e quindi:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} (Ma^2 - 1) \quad (6.59)$$

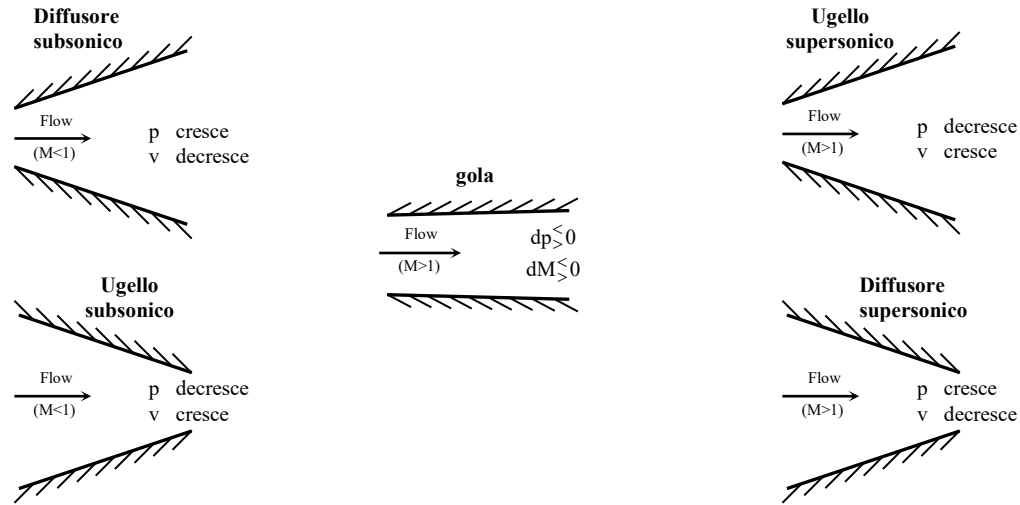
da cui si ottiene il sorprendente risultato che:

- Se $M < 1$ $\frac{dA}{dx}$ e $\frac{du}{dx}$ hanno segno opposto, cioè se A diminuisce con x la u dovrà crescere. Cioè la velocità aumenta in un convergente e diminuisce in un divergente (come nel caso incompressibile).
- Se $M > 1$ $\frac{dA}{dx}$ e $\frac{du}{dx}$ hanno stesso segno quindi se A aumenta con x la u aumenta (in un divergente) e se A diminuisce anche la u diminuisce (in un convergente).. Cioè la

velocità aumenta in un divergente e diminuisce in un convergente (al contrario del caso subsonico)

- Se $M=1 \quad \frac{dA}{dx} = 0$ e quindi questa condizione può essere ottenuta solo in una gola (convergente seguito da un divergente).

Si noti che il comportamento per $M>1$ dimostra che in regime supersonico l'aumento del volume specifico (diminuzione della densità) sopperisce sia all'aumento di A che a quello di u .



6.3.4 Variazione di temperatura tra due sezioni per flussi quasi-unidimensionali anche non isentropici

Dalle (6.48) si aveva:

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

che combinata con (6.1), (6.2) e (6.3), dà:

$$\frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_1 + \frac{c_1^2 M_1^2}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_2 + \frac{c_2^2 M_2^2}{2} \quad (6.60)$$

$$\frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_1 + \frac{\gamma R T_1 M_1^2}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_2 + \frac{\gamma R T_2 M_2^2}{2} \quad (6.61)$$

$$T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) \quad (6.62)$$

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} = H(M_1, M_2)} \quad (6.63)$$

si noti che non si sono utilizzate né le isoentropiche né la condizione di unidimensionalità, e quindi questa relazione è di validità generale (QU).

6.3.5 Flussi isoentropici con modello quasi-unidimensionale

- Variazione della pressione tra due sezioni.
Sostituendo le (6.4) nelle (6.63) si ha:

$$\frac{p_1^{\gamma-1}}{p_2^{\gamma-1}} = H^\gamma(M_1, M_2) \quad (6.64)$$

cioè:

$$\frac{p_1}{p_2} = H^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(M_1, M_2) = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (6.65)$$

- Variazione della densità.
Dall'equazione di stato (6.12) e dalle (6.63) e (6.65) si ha:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = H^{-1} \cdot H^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = H^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (6.66)$$

- Variazione del Ma con l'area della sezione.
Dalla conservazione della massa (6.39) e dalle (6.1) e (6.2) si ha :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{u_2 \rho_2}{u_1 \rho_1} = \frac{\rho_2 M_2 c_2}{\rho_1 M_1 c_1} = \frac{\rho_2 M_2 (\gamma R T_2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_1 M_1 (\gamma R T_1)^{\frac{1}{2}}} = H^{\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)^{-1}} H^{-\frac{1}{2}} \frac{M_2}{M_1} = H^{-\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} H^{-\frac{1}{2}} \frac{M_2}{M_1}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = H^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}(M_1, M_2) \frac{M_2}{M_1} \quad (6.67)$$

La (6.67) mette in relazione la variazione dei Ma con la variazione delle aree.

■ Relazioni al ristagno

Si dicono valori al ristagno ρ_t, P_t, T_t quelli che si ottengono per $Ma=0$ cioè per $u=0$.
Si definisce :

$$H(M_1 = M, M_2 = 0) = \mathbf{H}(M) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad (6.68)$$

da cui:

$$\frac{P}{P_t} = \mathbf{H}(M)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.69)$$

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \mathbf{H}(M)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (6.70)$$

$$\frac{T}{T_t} = \mathbf{H}(M) \quad (6.71)$$

La (6.71) è valida anche per flussi non isentropici mentre le (6.69) e (6.70) sono valide solo per flussi isentropici.

■ Relazioni soniche

Se la sezione 2 è in condizione soniche $M_2 = 1$ (in genere le sezioni soniche si indicano con un asterisco) $A_2 \Rightarrow A_2^*$ così come per le funzioni :

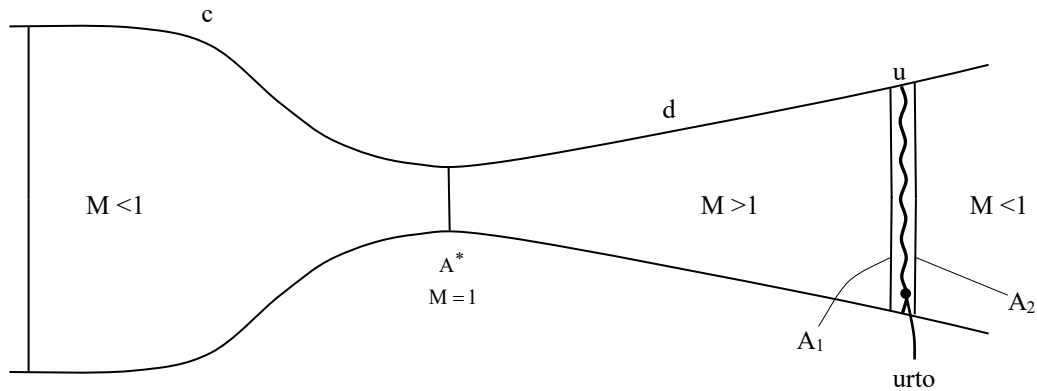
$$H(M_1, M_2) \Rightarrow H^*(M_1 = M, M_2 = 1) \text{ ecc...}$$

$$H^* = \frac{\frac{1+\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \quad (6.72)$$

pertanto dalle (6.67) si ha:

$$\frac{A}{A^*} = H^*^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{1}{M} \quad (6.73)$$

e quindi, nota la sezione di gola, si può calcolare se non vi sono urti, il Ma in qualunque sezione A del circuito (oppure l'area A necessaria a realizzare un certo Ma).
Il raggiungimento delle condizioni soniche viene detto soffocamento (o chocking), in quanto limita la portata in volume del condotto.
Alle pagine seguenti sono riportate le tabelle dei flussi isentropici, tratte da Shapiro Vol. 1 (1953).



E' evidente che il processo di espansione nel primo tratto del divergente d non può continuare in modo indefinito ed infatti nella sezione u si produce un urto che dà luogo ad una ricompressione localizzata del fluido.

6.3.6 Le velocità di riferimento in un flusso compressibile (*leggere*)

Dall'equazione dell'energia per un flusso adiabatico di un gas perfetto con modello QU :

$$2c_p T + u^2 = \text{cost} \quad (6.49)$$

e dalla relazione dei gas perfetti (6.1 e 6.3) :

$$c_p T = \frac{c_p \gamma R}{\gamma R} T = c^2 \frac{1}{\gamma - 1} \quad (6.74)$$

si ottengono i valori di c_t e u_{\max} :

$$2c^2 \frac{1}{\gamma - 1} + u^2 = \frac{2}{\gamma - 1} c^2 + u^2 = \frac{2}{\gamma - 1} c_t^2 = u_{\max}^2 \quad (6.75a)$$

essendo c_t la velocità del suono al ristagno che è la massima velocità del suono raggiungibile:

$$c_t = \sqrt{\gamma R T_t} \quad (6.76)$$

e u_{\max} è la massima velocità del fluido raggiungibile per temperatura nulla:

$$2c_p T + u^2 = u_{\max}^2$$

Dalle (6.75a):

$$\frac{2c^2}{\gamma-1} + u^2 = \frac{2}{\gamma-1} c_t^2 \quad (6.75)$$

isolando la u^2 , velocità del flusso al quadrato, si ottiene:

$$u^2 = \frac{2}{\gamma-1} (c_t^2 - c^2) = \frac{2}{\gamma-1} \gamma R (T_t - T)$$

$$u = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} R (T_t - T)} \quad (6.77)$$

per cui per $T = 0$ K si ottiene la u_{max} :

$$u_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} R T_t} \quad (6.78)$$

ed anche la velocità per $M=1$ (condizione soniche)

$$u_* = c_* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} R (T_t - T_*)} = \sqrt{\gamma R T_*} \quad (6.79)$$

che consente di calcolare:

$$\frac{T_*}{T_t} = \frac{2}{\gamma+1} \quad (6.80)$$

che sostituita nella (6.77) da:

$$u_* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} R T_t} \quad (6.81)$$

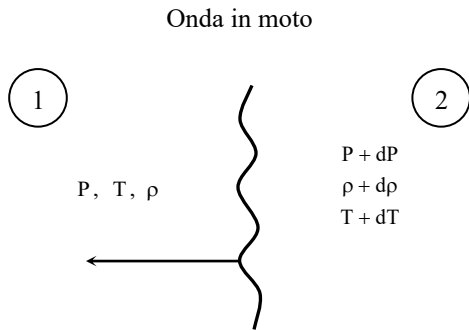
c_t , u_{max} , u_* costituiscono tre utili velocità di riferimento da utilizzare per flussi altamente compressibili.

Da c_* ci possiamo calcolare $M^* = \frac{u}{c_*}$

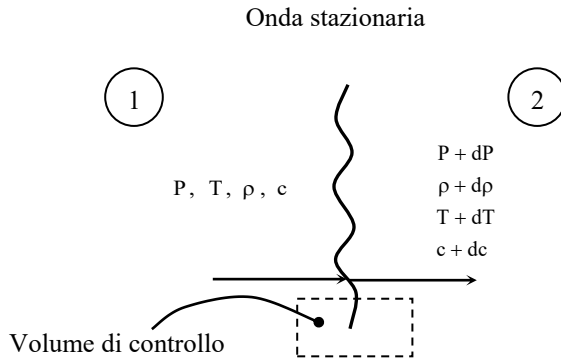
6.3.7 Velocità del suono

Sia data un'onda acustica che si propaga con velocità c in un fluido fermo ed una seconda onda che si propaga in fluido con velocità c pari alla velocità relativa dell'onda a monte, così l'onda appare stazionaria cioè ferma. Poiché le variazioni di P , T , ρ sono piccole il processo è isentropico.

Onde in movimento in un fluido fermo



Onde in movimento in un flusso traslatorio con velocità c



Dall'equazione (6.39) per un volumetto di controllo a cavallo dell'onda si ottiene:

$$\rho c = (\rho + d\rho) (c + dc) \tag{6.82}$$

$$\rho c = \rho c + c d\rho + \rho dc + dc d\rho$$

ovvero (trascurando i termini di II ordine):

$$c d\rho = -\rho dc \tag{6.83}$$

consideriamo ora la (6.54)

$$\begin{aligned} P + \rho c^2 &= (P + dP) + (\rho + d\rho)(c + dc)^2 = \\ &= (P + dP) + (\rho + d\rho)(c^2 + 2c dc + dc^2) = \\ &= P + dP + \rho c^2 + c^2 d\rho + 2c\rho dc \end{aligned} \quad (6.84)$$

$$dP = -c^2 d\rho - 2c\rho dc \quad (6.85)$$

sostituendo in (6.85) la (6.83)

$$dP = -c^2 d\rho + 2c^2 d\rho = c^2 d\rho \quad \text{da cui si ottiene}$$

$$c^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s \quad (6.86)$$

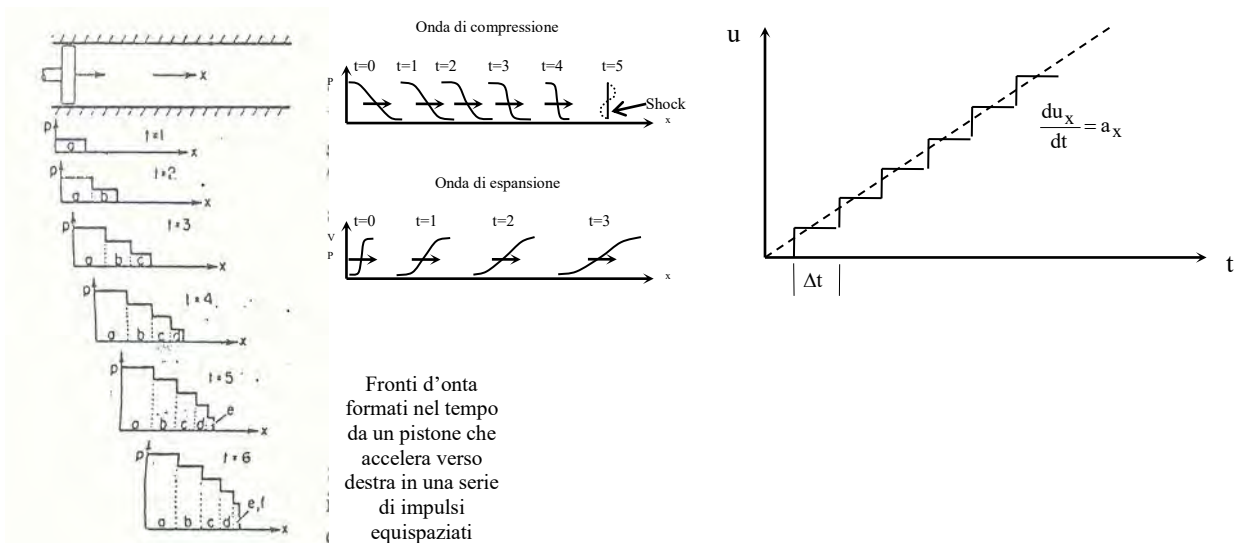
che è la velocità del suono fino ad ora utilizzata.

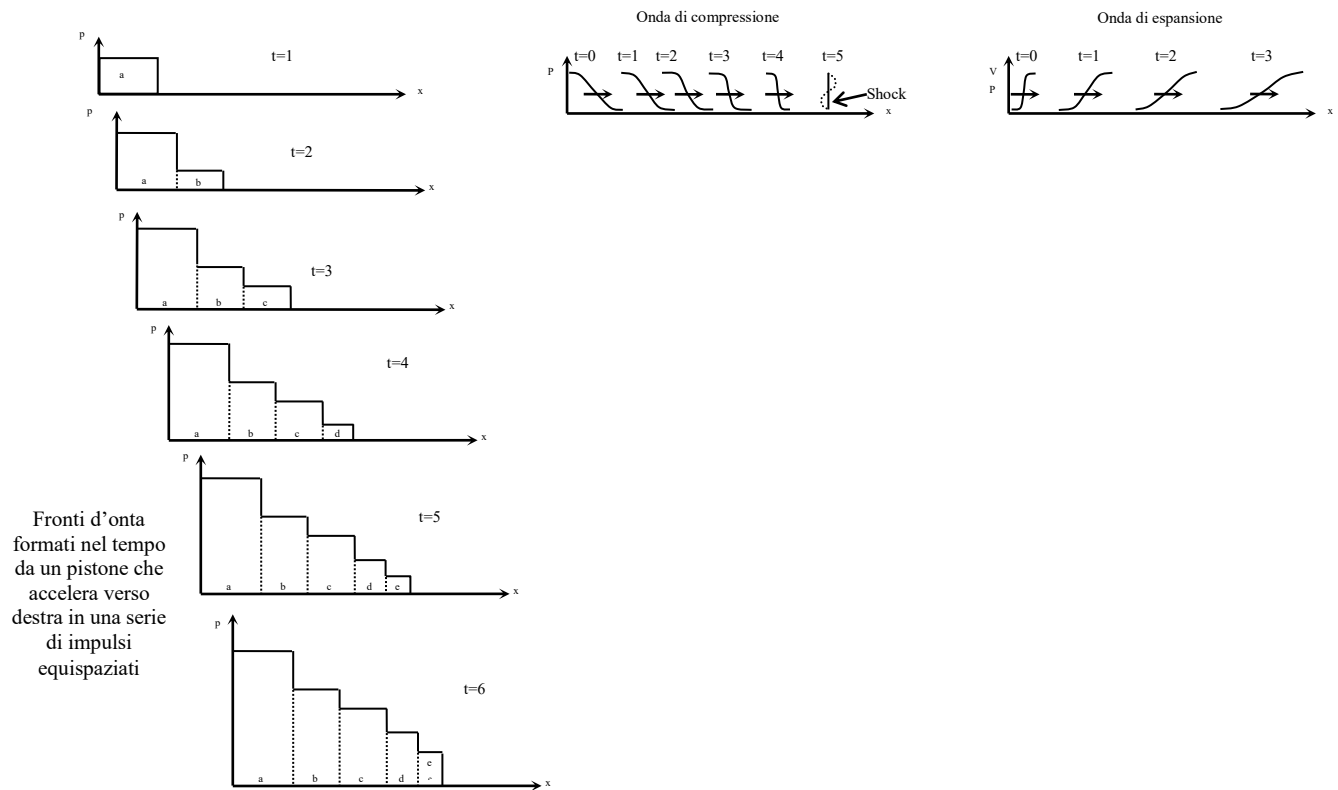
6.4 Urto normale

6.4.1 Descrizione fisica della formazione di onde d'urto e di espansione

Diamo ora una spiegazione fisica del motivo per cui le onde di compressione tendono a coalescere dando luogo ad un urto che risulta essere piuttosto intenso, mentre le onde di espansione tendono ad allontanarsi e quindi a diventare sempre più deboli.

Consideriamo un pistone che accelera in un tubo cilindrico infinitamente lungo pieno di gas. Consideriamo l'accelerazione come una serie di incrementi istantanei di velocità seguiti da intervalli (Δt) a velocità costante. Le onde di pressione prodotte si propagano con velocità (6.1) $c = \sqrt{\gamma RT}$. Ma ciascuna onda avrà una sua velocità di propagazione data dalla sua T . In particolare le onde che si trovano più indietro viaggiano con velocità maggiore in quanto la loro pressione e quindi la loro temperatura è maggiore. Il risultato di questo processo è che il profilo diventa sempre più ripido dando luogo ad un gradiente infinito corrispondente ad un urto di compressione debole. Analogo ragionamento applicato ad un pistone che si muove verso sinistra dando luogo ad onde di espansione porta alla conclusione che queste diventeranno sempre meno ripide e quindi in genere incapaci formare una discontinuità.

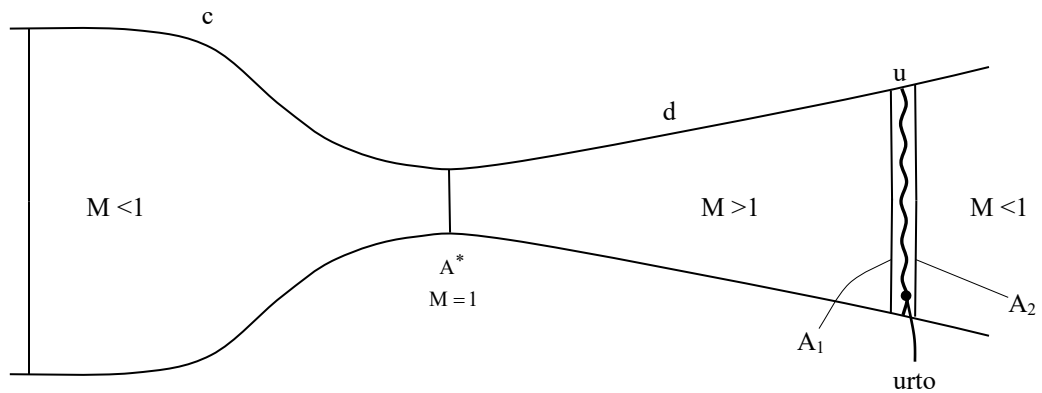




6.4.2 Equazioni dell'urto normale con modello unidimensionale

Per la costruzione del modello matematico dell'urto non possiamo ovviamente far uso delle isoentropiche in quanto i processi dissipativi, ai quali sono associati rilevanti variazioni di entropia, assumono nell'urto enorme importanza (il numero di Mach a monte dell'urto sono sempre maggiori di 1 ed $Ec \propto Ma^2$ (eq. 3.111)).

Con riferimento alle caratteristiche geometriche e le didascalie nello schema seguente di un circuito gasdinamico (supersonico) determiniamo le equazioni che governano il flusso in presenza di urto sotto l'ipotesi di unidimensionalità (U). Tale ipotesi è accettabile in quanto, essendo l'urto di spessore infinitesimo (discontinuità).



Dalle (6.39) si ha:

$$(A_1 = A_2) \rightarrow \rho_1 \bar{u}_1 = \rho_2 \bar{u}_2 \quad (6.87)$$

che non è valida invece nel caso di quasi-unidimensionalità.

Dalla Q.M.(6.54) unidimensionale + l'eq. di stato dei gas perfetti (6.12):

$$P_1 + \frac{P_1}{RT_1} u_1^2 = P_2 + \frac{P_2}{RT_2} u_2^2 \quad (6.88)$$

$$P_1 \left(1 + \frac{\gamma u_1^2}{\gamma R T_1} \right) = P_2 \left(1 + \frac{\gamma u_2^2}{\gamma R T_2} \right)$$

Dalla quale si ricava il rapporto tra le pressioni a monte e valle dell'urto :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \quad (6.89)$$

Dalla conservazione della massa e dall'eq. di stato :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1 R T_1}{\rho_2 R T_2} = \frac{u_2 T_1}{u_1 T_2} = \frac{(\gamma R T_2)^{1/2} T_1 M_2}{(\gamma R T_1)^{1/2} T_2 M_1}$$

cioè :

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/2} \frac{M_2}{M_1} \quad (6.90)$$

ricordando la (6.63) :

$\frac{T_1}{T_2} = H(M_1, M_2)$ è valida anche in presenza di urti e combinando le (6.63),(6.89),(6.90)

si ottiene :

$$\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} = H^{1/2}(M_1, M_2) \frac{M_2}{M_1} \quad (6.91)$$

dalla quale può essere ricavato M_2 a valle dell'urto in funzione di M_1 a monte:

$$\boxed{M_2^2 = \frac{\frac{2}{\gamma-1} + M_1^2}{\frac{2\gamma M_1^2}{\gamma-1} - 1}} \quad (6.92)$$

Sostituendo la (6.92) nella (6.63) si ottiene :

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1\right)}{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} M_1^2}} \quad (6.93)$$

e dalla (6.90)

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}} \quad (6.94)$$

combinando l'equazione di stato (6.12) con la relazione che abbiamo appena ricavato (6.93 e 6.94) otteniamo il salto di densità nell'urto :

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2}} \quad (6.95)$$

naturalmente la pressione totale a valle dell'urto è minore che a monte a causa della perdita viscosa nell'urto (l'urto è un processo irreversibile); essa è calcolabile con la funzione(6.69) con $M_a = M_2$ a valle, ipotizzando che il gas si ricomprima isoentropicamente fino alle condizioni di ristagno sia a monte (P_1) che a valle (P_2) dell'urto:

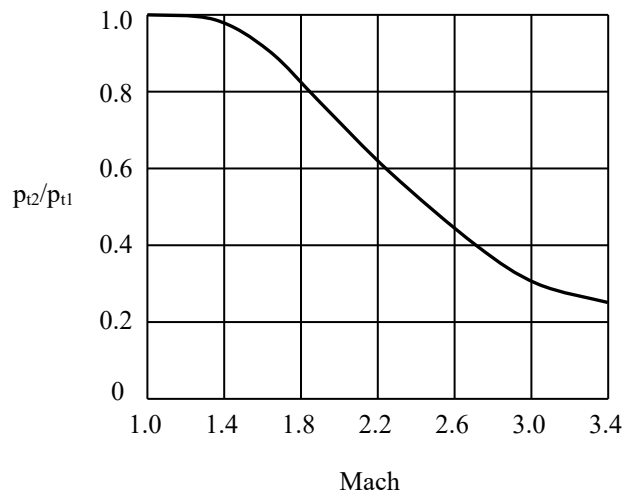
$$\frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \frac{P_{t2}}{P_2} \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1}{P_{t1}} = \frac{\left(\frac{P_1}{P_{t1}}\right) \left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\left(\frac{P_2}{P_{t2}}\right)} = \left\{ \frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right\}^{+1/\gamma-1} \left\{ \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} \right\}^{\gamma/\gamma-1} \quad (6.96)$$

quindi :

$$\frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \left\{ \frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right\}^{+\frac{1}{\gamma-1}} \left\{ \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.97)$$

Le relazioni da (6.92) a (6.97) sono le cosiddette equazioni di salto per l'urto normale. Si vede che la (6.97) parte da 1 per $M_1=1$ con tangente orizzontale e tende a zero per $M_1 \rightarrow \infty$ come:

$$\left[\frac{1}{M_1} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \cong \frac{1}{M_1^5}$$



6.4.3 Relazioni di Rankine-Hugoniot

Dalle relazioni di salto possono essere desunte delle relazioni fra rapporti di pressione, densità e temperature eliminando M_1 . Queste relazioni sono dette di **Rankine-Hugoniot**. La figura seguente riporta il rapporto delle pressioni totali in funzioni di M_a (per $1 < M_a < 3.4$). Tali quantità sono calcolate per $\gamma = 1.4$.

Dalle relazioni (6.93) e (6.94) eliminando M_1 si ottiene:

$$\blacksquare \frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{P_2}{P_1} \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \frac{P_2}{P_1} \right]}{\frac{P_2}{P_1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = f_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad (6.99)$$

ed analogamente dalle (6.94) e (6.95) si ottiene:

$$\blacksquare \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{P_2}{P_1} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) + 1}{\frac{P_2}{P_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = f_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad (6.100)$$

$$\blacksquare \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} = f_3 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad (6.101)$$

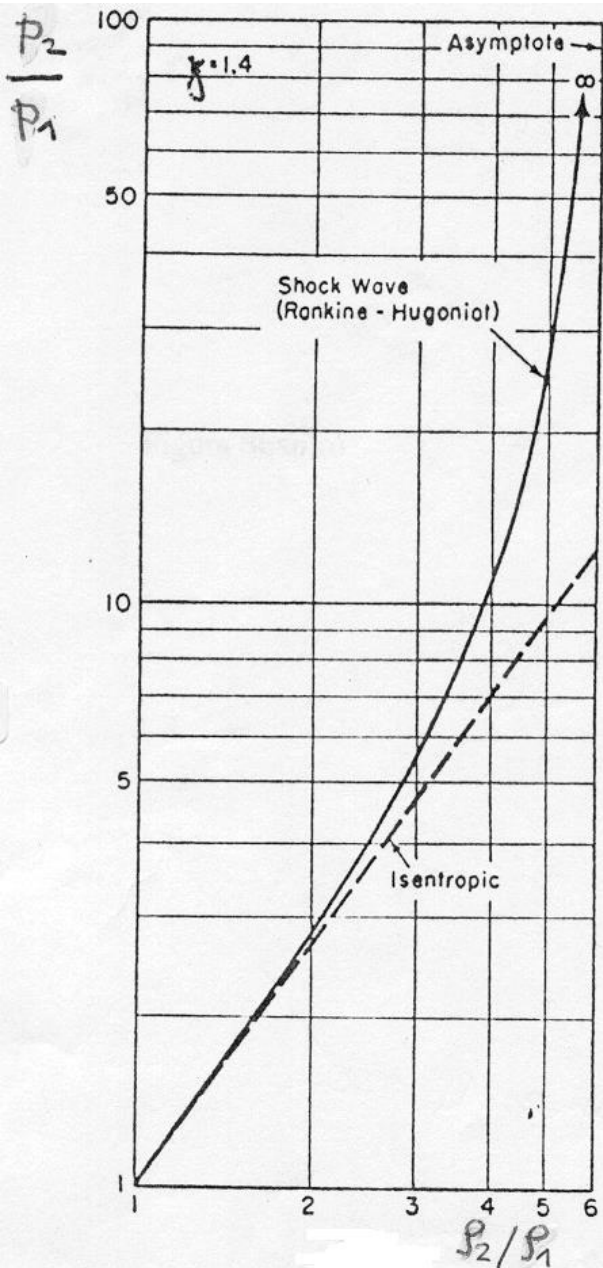


FIG. The Rankine-Hugoniot curve, for $\gamma = 1.4$.

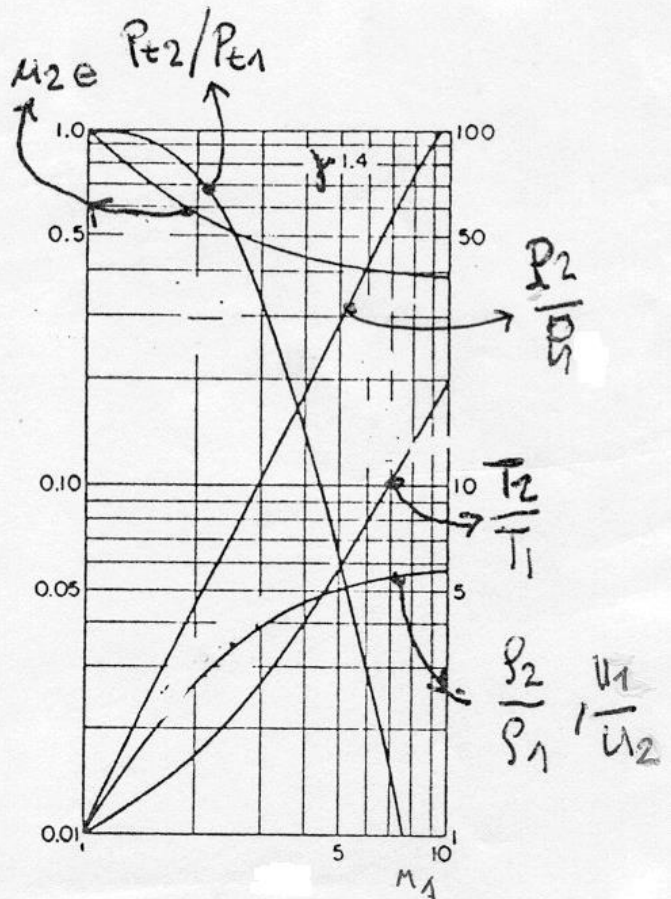


FIG. Working curves for normal shock, for $\gamma = 1.4$.

L'andamento di queste relazioni (Rankine-Hugoniot) è riportato nelle figure.

6.4.4 Cenni sullo spessore dell'urto

Mediante considerazioni di analisi dimensionale si può dimostrare che :

$$\text{Re}_{urto} = \frac{\rho_* u_* \delta}{\mu_*} \approx 1 \quad (6.102)$$

essendo δ lo spessore dell'urto ed inoltre :

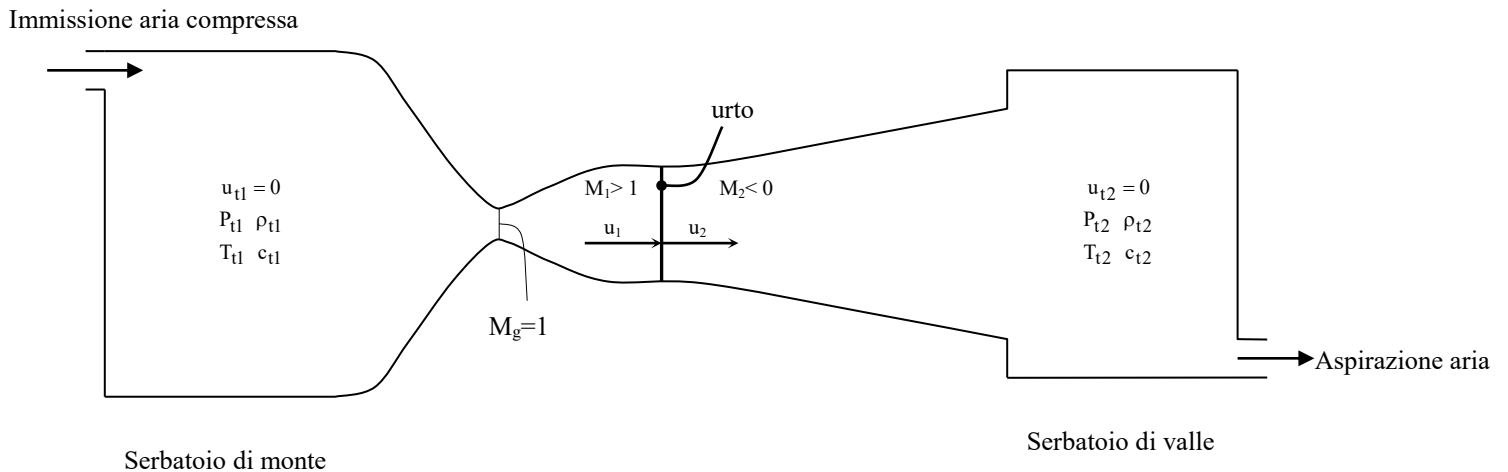
$$\frac{\delta}{l^*} \approx \frac{5}{8} \text{Re}_{urto} \quad (6.103)$$

essendo l^* il libero cammino medio nelle condizioni soniche. Quindi lo spessore dell'urto è dell'ordine del libero cammino medio delle molecole.

6.4.5 Variazioni dell'entropia nell'urto

Come detto attraverso l'urto c'è una degradazione di energia meccanica in energia termica che darà luogo ad un aumento di entropia. Bisogna notare che u_{max} assume lo stesso valore a monte ed a valle dell'urto ed analogamente le C_t (velocità del suono al ristagno).

Consideriamo uno schema di un generatore di onde d'urto, cioè un serbatoio a monte in pressione P_{t1} e uno a valle con pressione P_{t2} ($P_{t1} > P_{t2}$) collegati da un opportuno generatore di flusso supersonico:



Per quanto detto avremo :

$$C_{t1} = C_{t2} = C_t$$

$$T_{t1} = T_{t2} = T_t$$

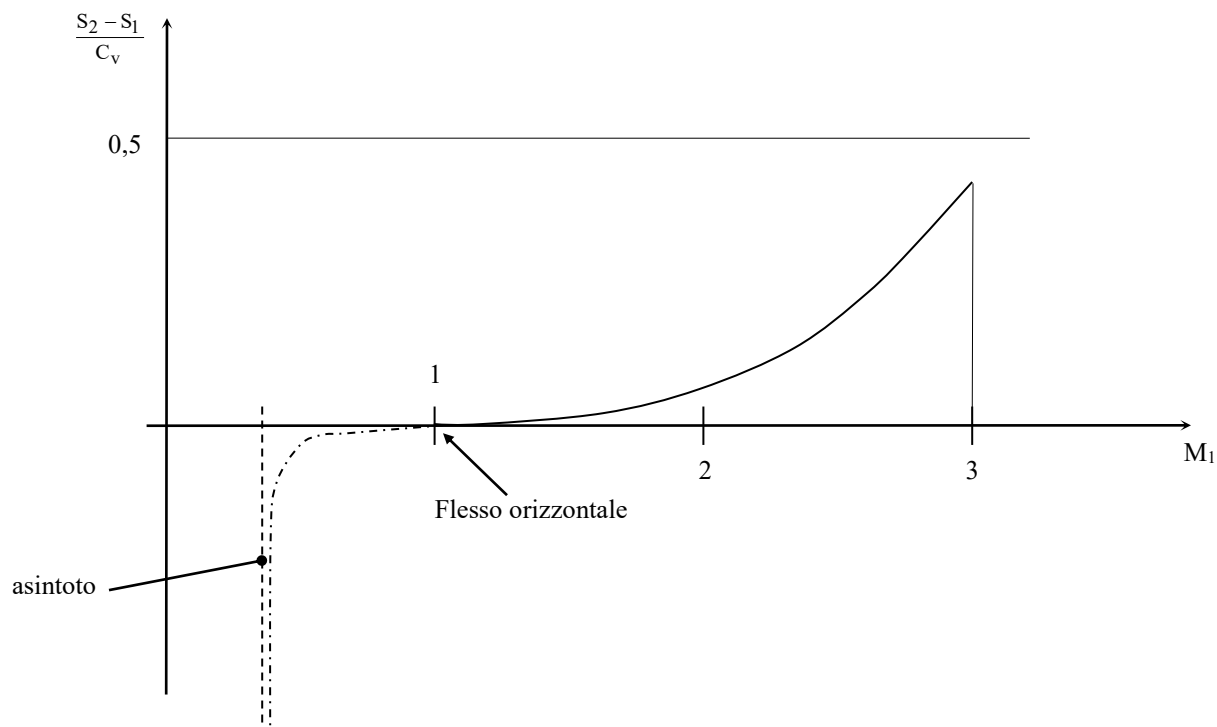
abbiamo visto (Cap. 1.3.3) che:

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left\{ \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right\} \quad (6.104)$$

sostituendo si ottiene la fondamentale espressione dell'aumento di entropia in funzione di M_1 :

$$\frac{S_2 - S_1}{C_v} = f(M_1) = \gamma \ln \left[\frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] + \ln \left[\frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \quad (6.105)$$

il cui andamento è rappresentato come segue:



In $M_1 \cong 1$ c'è un flesso a tangente orizzontale che corrisponde agli urti detti *deboli*. Questi sono piuttosto importanti perché danno luogo ad una ricomprensione senza rilevante aumento di entropia (e quindi senza generare vorticità per urti curvi - vedasi teorema di Crocco (3.77)). La parte di curva negativa per $M < 1$ indica che siamo in presenza di un fenomeno impossibile. Per interpretarlo esprimiamo $S_2 - S_1$ nel modo seguente. Considerando che a valle ed a monte dell'urto il flusso sarà isoentropico, si può arrivare con un modello isentropico fino al ristagno nei due serbatoi e quindi dalle (6.104) si ha:

$$\frac{P_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{P_{t2}}{\rho_{t2}^\gamma}$$

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left[\frac{P_{t2}}{P_{t1}} \left(\frac{\rho_{t1}}{\rho_{t2}} \right)^\gamma \right] \quad (6.106)$$

che con l'equazione di stato diventa:

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left[\left(\frac{P_{t1}}{P_{t2}} \right)^{\gamma-1} \left(\frac{T_{t2}}{T_{t1}} \right)^\gamma \right] = C_v \ln \left[\left(\frac{P_{t1}}{P_{t2}} \right)^{\gamma-1} \right] \quad (6.107)$$

$$\Rightarrow S_2 - S_1 = C_v (\gamma - 1) \ln \frac{P_{t1}}{P_{t2}} = R \ln \frac{P_{t1}}{P_{t2}}$$

per $M > 1$, $S_2 - S_1 > 0 \Rightarrow P_{t1} > P_{t2}$

la differenza di pressione totale è l'energia meccanica persa nell'urto.

Si può vedere come la condizione: $P_1 > P_2$, $M_1 < 1$, $M_2 > 1$, cioè il passaggio da subsonico a supersonico attraverso un salto di espansione, sia impossibile in quanto dalla figura precedente $S_2 - S_1 < 0$ e conseguentemente $P_{t1} < P_{t2}$ cioè raccoglieremmo nel serbatoio di valle il fluido alla stessa T_t ma a pressione P_t maggiore senza compiere lavoro !!!

6.4.6 Effetto della temperatura sul rapporto γ

Nel caso dell'aria l'ipotesi di $\gamma = 1.4$ è valida fino ad una temperatura $T_t \approx 550K$. Oltre tale valore viene attivato anche un grado di libertà vibrazionale (oltre il traslazionale ed il rotazionale) ed il γ si riduce secondo la seguente formula empirica:

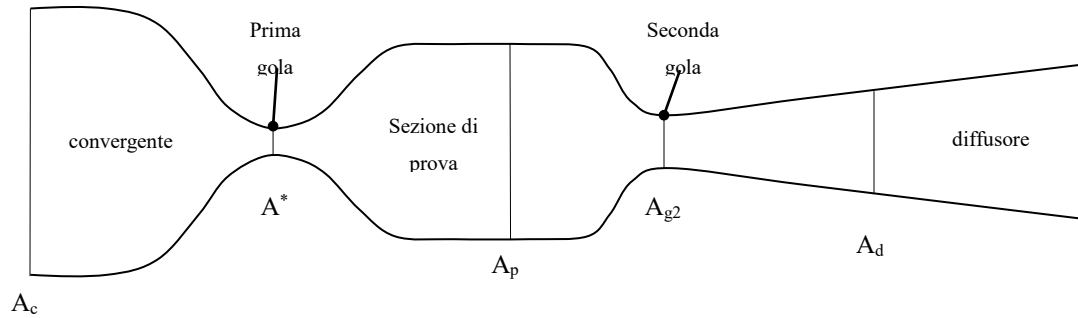
$$\gamma(T) = 1 + \frac{\gamma_p - 1}{1 + (\gamma_p - 1) \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \cdot \frac{e^{\theta/T}}{(e^{\theta/T} - 1)^2}}$$

con $\theta = 3055 K$ e $\gamma_p = c_p/c_v = 1.4$, che è valida fino a $T = 3055 K$.

6.5 Circuiti gasdinamici con diverse gole (*leggere*)

La prima gola che raggiunge le condizioni soniche è la gola di minore sezione. Vediamo ora quali sono le condizioni affinché la gola successiva vada in choking e quindi tra le due gole sia presente un flusso supersonico.

L'area della seconda gola è determinata dalla condizione di choking (soffocamento) dell'impianto (ad esempio una galleria supersonica) nelle condizioni di avviamento.



La situazione più gravosa si ha quando l'urto ha la massima intensità, il che avviene quando l'urto è situato in camera di prova (A_p). In tal caso con riferimento allo schema si ha :

$$\frac{A_{g2}}{A_p} = \frac{M_{p2}}{M_{g2}} H^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}(M_{p2}, M_{g2}, \gamma) \quad (6.108)$$

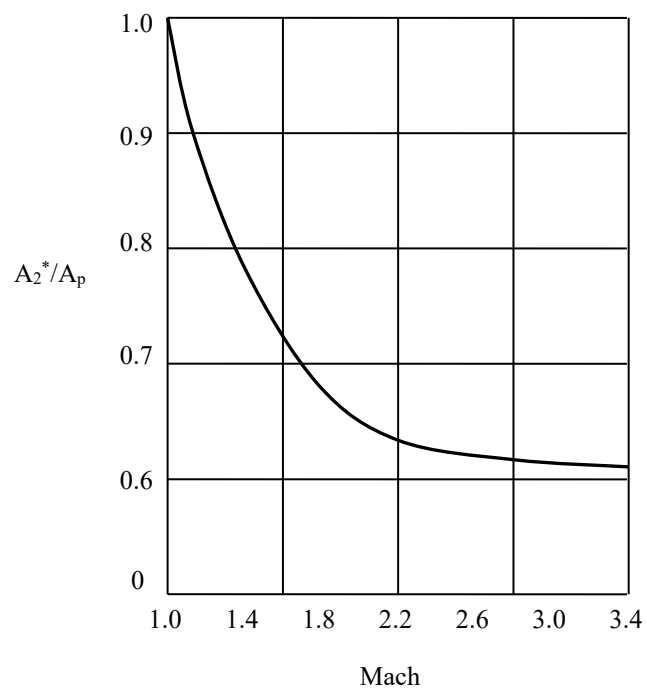
La condizione limite si ottiene per: $M_{g2} = M_{g2^*} = 1$
cioè:

$$\frac{A_{g2^*}}{A_p} = M_{p2} \left[H(M_{p2}, \gamma) \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (6.109)$$

dove M_{p2} può essere espressa in funzione di M_{p1} mediante le (6.92) e per $\gamma=1.4$ si ha:

$$\frac{A_{g2^*}}{A_p} = \frac{(5 + M_p^2)^{\frac{1}{2}} (7M_p^2 - 1)^{2.5}}{216M_p^6} \quad (6.110)$$

Tramite la (6.110) si dimensiona la seconda gola, la quale è al minimo uguale a $0,6 \cdot A_p$ e quindi estremamente grande.



6.6 Onda d'urto obliqua ed onde di espansione (*leggere*)

Consideriamo le situazioni geometriche riportate nelle figure seguenti, che può rappresentare una delle condizioni di flusso supersonico intorno ad un corpo aguzzo riportate al cap. 3.8, in cui si forma un urto attaccato.

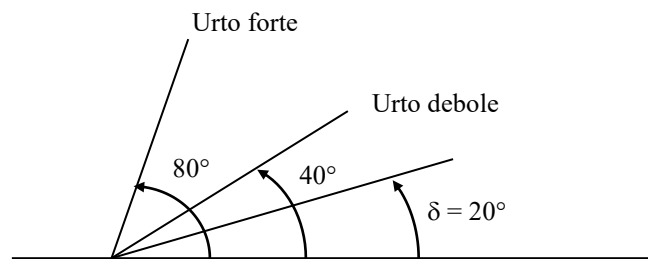
Intorno ad una singolarità geometrica si possono formare onde di espansione (a forma di ventaglio) o onde d'urto oblique.

Per le onde d'urto, note T_1 , u_1 (M_1), p_1 , ρ_1 , δ , possiamo calcolare T_2 , u_2 , p_2 , ρ_2 e soprattutto le σ :

$$\operatorname{tg} \sigma \cot g(\sigma - \delta) = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \operatorname{sen}^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \operatorname{sen}^2 \sigma}$$

urto forte \rightarrow elevato salto di pressione totale e statica \rightarrow dissipazioni $\rightarrow M_2 < 1$

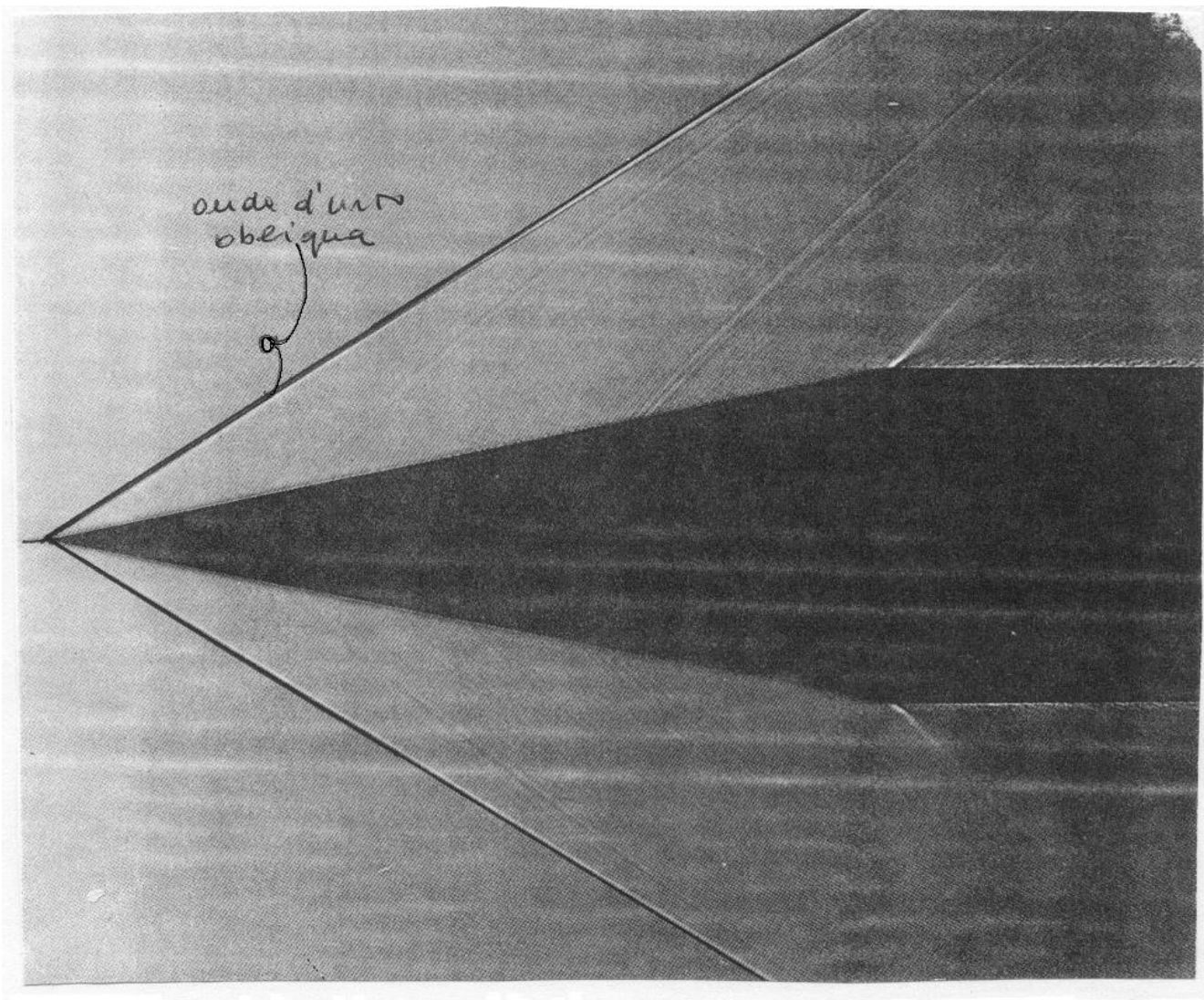
urto debole \rightarrow modesto salto di pressione totale e statica \rightarrow isentropico $\rightarrow M_2 > 1$



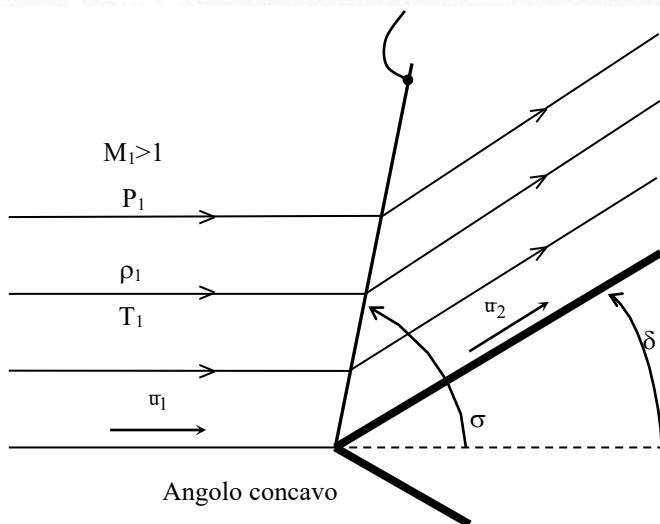
δ = angolo della superficie, ossia di deviazione del flusso

6.6.1 Onda d'urto obliqua

Riferiamoci per ora al caso di un angolo concavo ($\delta > 0$). Questo caso è estremamente interessante in quanto nello spigolo concavo si genera un urto attaccato che parte dallo spigolo vivo e si propaga in forma piana verso il flusso, questo si chiama **urto obliquo**.



Flusso a $M=1.84$ con $\delta=12^\circ.5$ (visualizzazione Shadowgraph)



Se $\delta > 0$ urto

Per studiare questo fenomeno si utilizzano ancora le equazioni della fluidodinamica cap. 3 in forma integrale nelle condizioni asintotiche viste al cap. 6.1 (equazioni di Eulero 2D) cioè:

$$Re \rightarrow \infty ; Fr \rightarrow \infty ; St \rightarrow \infty$$

$$\text{e flusso 2D (piano): } \frac{\partial}{\partial x_3} = 0 ; u_3 = 0$$

Con queste ipotesi si ottiene, essendo V_0 il volume di controllo ed S_0 la sua frontiera:

- C.M.

Dalla (3.7) si ha:

$$\frac{DM}{Dt} = \iint_{S_0} \rho \bar{u} \cdot \bar{n} dS = 0 \quad (6.111)$$

- C.Q.M.

Considerando le (3.8 b) e le (3.15) e ricordando che

$$Re \rightarrow \infty ; Fr \rightarrow \infty ; St \rightarrow \infty$$

si ottiene l'equazione di Eulero in forma integrale

$$\iint_{S_0} \{ \rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) + P \bar{n} \} dS = 0 \quad (6.112)$$

- B.E.T. (Conservazione dell'Energia Totale)

Dalla equazione integrale (3.29) per $Re \rightarrow \infty ; Fr \rightarrow \infty ; St \rightarrow \infty e q' \rightarrow 0$

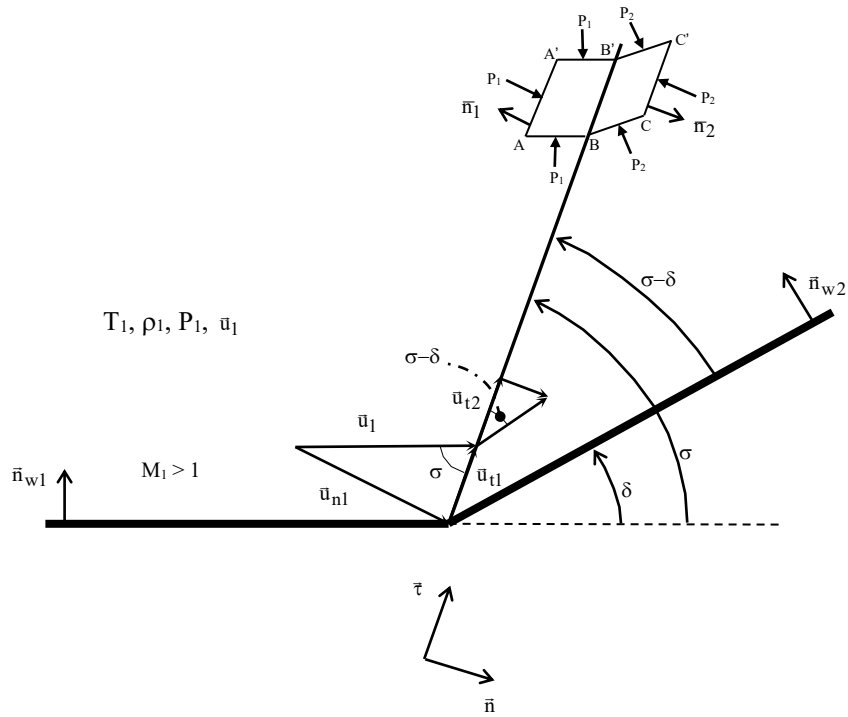
$$\iint_{S_0} (\rho e + P) \bar{u} \cdot \bar{n} dS = 0 \quad (6.113)$$

essendo e l'energia totale termocinetica $e = U + \frac{u^2}{2}$.

- E.S.

$$P = \rho RT \quad (6.12)$$

Con riferimento alla figura sono presenti 5 incognite: $|u_2|$, ρ_2 , P_2 , T_2 , σ . Abbiamo a disposizione 5 equazioni: C.M.; C.Q.M.1; C.Q.M.2; E.S.; B.E.T.. Vediamo come queste equazioni si semplificano in questo caso.



- Dalla (6.111) scritta sul volume di controllo ($A A' C' C$) si ha:

$$\bar{u}_1 = u_{n1}\bar{n} + u_{\tau1}\bar{\tau} \quad \text{e} \quad \bar{u}_2 = u_{n2}\bar{n} + u_{\tau2}\bar{\tau}$$

ed essendo le facce $AB//\bar{u}_1$, $A'B'//\bar{u}_1$, $BC//\bar{u}_2$, $B'C'//\bar{u}_1$:

$$-\rho_1 u_{n1}AA' + \rho_2 u_{n2}CC' = 0$$

ma AA' e CC' sono uguali e quindi:

$$\rho_1 u_{n1} = \rho_2 u_{n2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_{n2}}{u_{n1}}} \quad (6.114)$$

- Dalla equazione della quantità di moto (6.112) scritta sul volume di controllo ($A A' C' C$) si ha:

$$(-\rho_1 \bar{u}_1 u_{n1} + P_1 \bar{n}_1)AA' + P_1 \bar{n}_1 A'B' + P_2 \bar{n}_2 B'C' + (\rho_2 \bar{u}_2 u_{n2} + P_2 \bar{n}_2)CC' - P_2 \bar{n}_2 BC - P_1 \bar{n}_1 AB = 0$$

Il secondo e sesto (terzo e quinto) termine si annullano.

La stessa proiettata su \bar{n} ed $\bar{\tau}$ (Eulero in forma integrale) dà le due equazioni scalari :

Direzione normale, \bar{n} :

$$-\rho_1 u_{n1} u_{n1} AA' + \rho_2 u_{n2} u_{n2} CC' + P_2 CC' - P_1 AA' = 0 \quad (6.115)$$

dalla quale si ricava :

$$\boxed{P_1 + \rho_1 u_{n1}^2 = P_2 + \rho_2 u_{n2}^2} \quad (6.116)$$

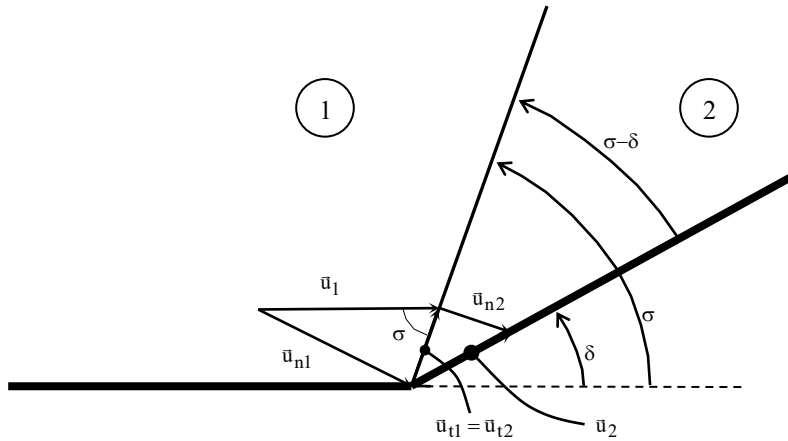
Direzione tangenziale, $\vec{\tau}$:

$$-\rho_1 u_{n1} u_{\tau 1} AA' + \rho_2 u_{\tau 2} u_{n2} CC' = 0 \quad (6.117)$$

da cui si ottiene, tenendo conto delle (6.114) ed essendo $AA' = CC'$:

$$-\rho_2 u_{n2} (u_{\tau 2} - u_{\tau 1}) = 0 \Rightarrow \boxed{u_{\tau 2} = u_{\tau 1}} \quad (6.118)$$

cioè la componente tangenziale della velocità non si modifica attraverso l'urto.



Ma a monte dell'urto (campo 1)

$$u_{n1} = u_1 \sin \sigma \quad (6.119)$$

$$u_{\tau 1} = u_1 \cos \sigma \quad (6.120)$$

mentre a valle (campo 2)

$$u_{\tau 2} = u_2 \cos(\sigma - \delta) = u_{\tau 1} = u_1 \cos \sigma \quad (6.121)$$

$$u_{n2} = u_2 \sin(\sigma - \delta) \quad (6.122)$$

dalla (6.121)

$$u_2 = \frac{u_1 \cos \sigma}{\cos(\sigma - \delta)} \quad (6.123)$$

e dalla (6.122) con le (6.123) e (6.119)

$$u_{n2} = u_1 \cos \sigma \operatorname{tg}(\sigma - \delta) = u_{n1} \operatorname{cotg}(\sigma) \operatorname{tg}(\sigma - \delta) \quad (6.124)$$

combinando la (6.114)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_{n2}}{u_{n1}} \quad (6.114)$$

e la (6.124), si ottiene:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \operatorname{cotg}(\sigma) \operatorname{tg}(\sigma - \delta) = \frac{\operatorname{tg}(\sigma - \delta)}{\operatorname{tg} \sigma} \quad (6.125)$$

- Dall'equazione dell'energia (6.113), poiché il flusso è tangente alle facce AB , $A'B'$, BC , $B'C' \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ su queste facce (non c'è flusso di energia attraverso queste superfici):

$$-u_{n1} \left\{ \rho_1 \left(U_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) + P_1 \right\} AA' + u_{n2} \left\{ \rho_2 \left(U_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) + P_2 \right\} CC' = 0 \quad (6.126)$$

$$\rho_1 u_{n1} \left(U_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} \right) = \rho_2 u_{n2} \left(U_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} \right) \quad (6.127)$$

e ricordando le (6.114) e dividendo per $\rho_2 u_{n2}$:

$$U_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} = U_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} \quad (6.128)$$

ovvero:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (6.129)$$

essendo h l'entalpia. Ricordando la relazione $c_p = \left(\frac{dh}{dT} \right)_{P=\text{cost}}$ si ha:

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (6.130)$$

che è uguale alla (6.48) per (QU). Si ha quindi:

$$c_p (T_1 - T_2) = \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) \quad (6.131)$$

ma

$$u_2^2 - u_1^2 = (u_{n2}^2 + u_{\tau 2}^2) - (u_{n1}^2 + u_{\tau 1}^2) = u_{n2}^2 - u_{n1}^2 \quad (6.132)$$

e quindi:

$$\boxed{c_p(T_1 - T_2) = \frac{(u_{n2}^2 - u_{n1}^2)}{2}} \quad (6.133)$$

Questa relazione è analoga alla (6.48) ma compare il termine u_{n1} e u_{n2} , cioè conta il M relativo alla componente della **velocità normale all'urto**.

Pertanto tutto è analogo a quanto visto ai Cap. 6.3.4 e 6.4 relativi all'urto normale ma in termini di M_{n1} e M_{n2} :

$$M_{n1} = M_1 \operatorname{sen} \sigma \quad (6.134)$$

$$M_{n2} = f(M_{n1})$$

$$M_2 = \frac{M_{n2}}{\operatorname{sen}(\sigma - \delta)} \quad (6.135)$$

Valgono in particolare le relazioni (6.92-6.101).

Inoltre dalle (6.125) e (6.95) si può calcolare la σ , cioè la deviazione dell'urto dalla parete:

$$\frac{\tan \sigma}{\tan(\sigma - \delta)} = \frac{(\gamma - 1)M_{n1}^2}{2 + (\gamma - 1)M_{n1}^2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \operatorname{sen}^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \operatorname{sen}^2 \sigma} \quad (6.136)$$

con passaggi trigonometrici si può ottenere una forma esplicita:

$$\operatorname{tg} \delta = 2 \operatorname{cotg} \sigma \frac{M_1^2 \operatorname{sen}^2 \sigma - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\sigma) + 2}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \delta = 2 \operatorname{cotg} \sigma \frac{M_{n1}^2 - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\sigma) + 2}} \quad (6.137)$$

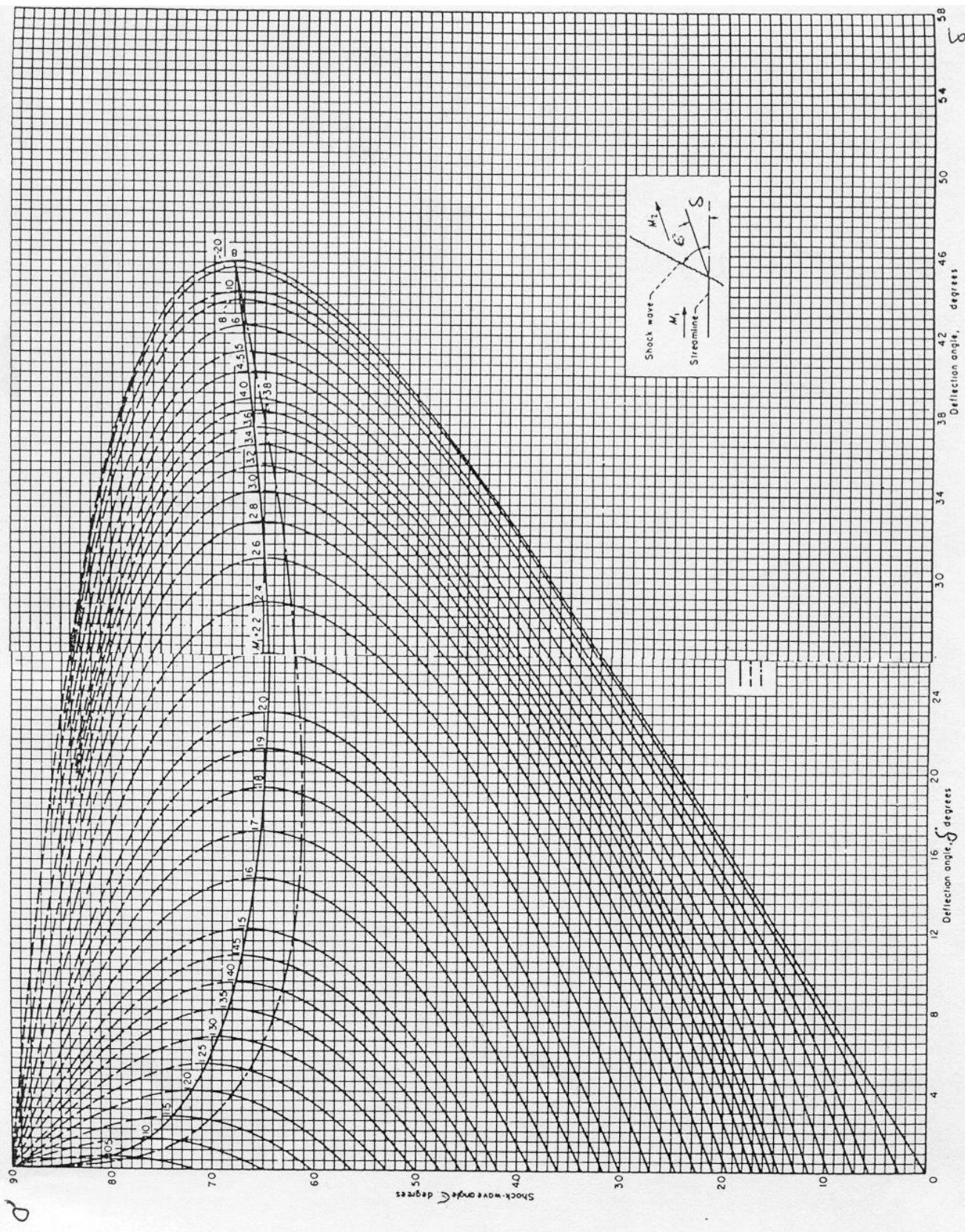


FIGURE Oblique shock properties: $\gamma = 1.4$. The S - M diagram. (From NACA Report 1135, Ames Research Staff, "Equations, Tables and Charts for Compressible Flow," 1953.)

Dalle relazioni precedenti e dalla figura è possibile determinare le condizioni limite per urto attaccato e staccato.

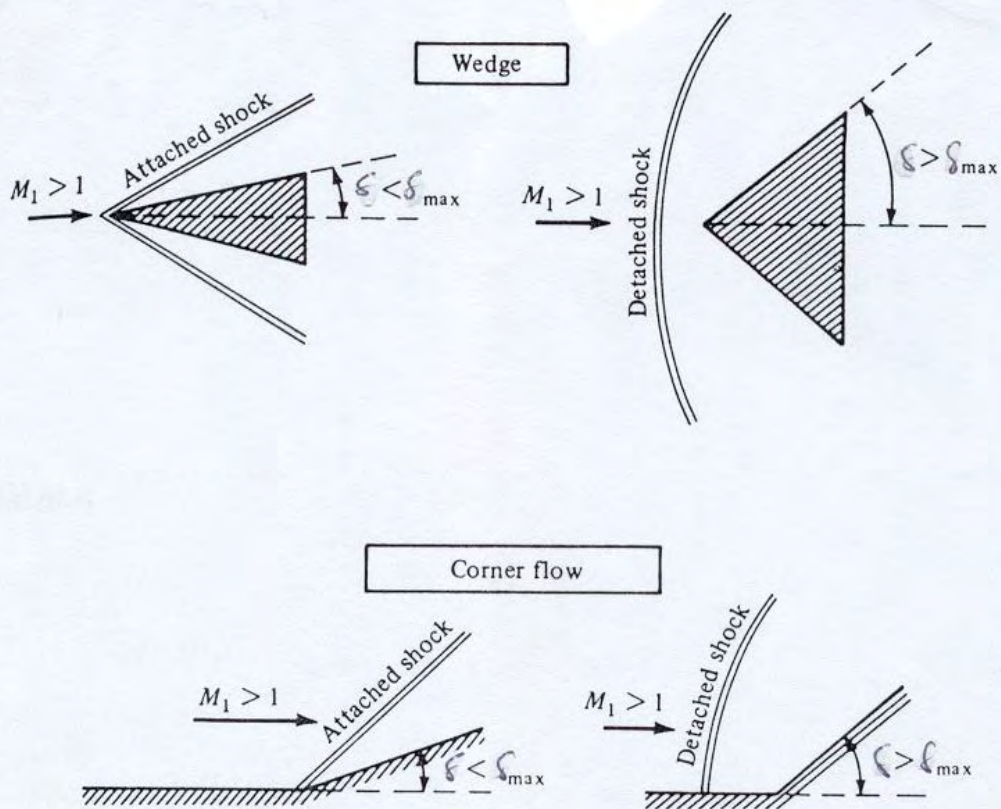


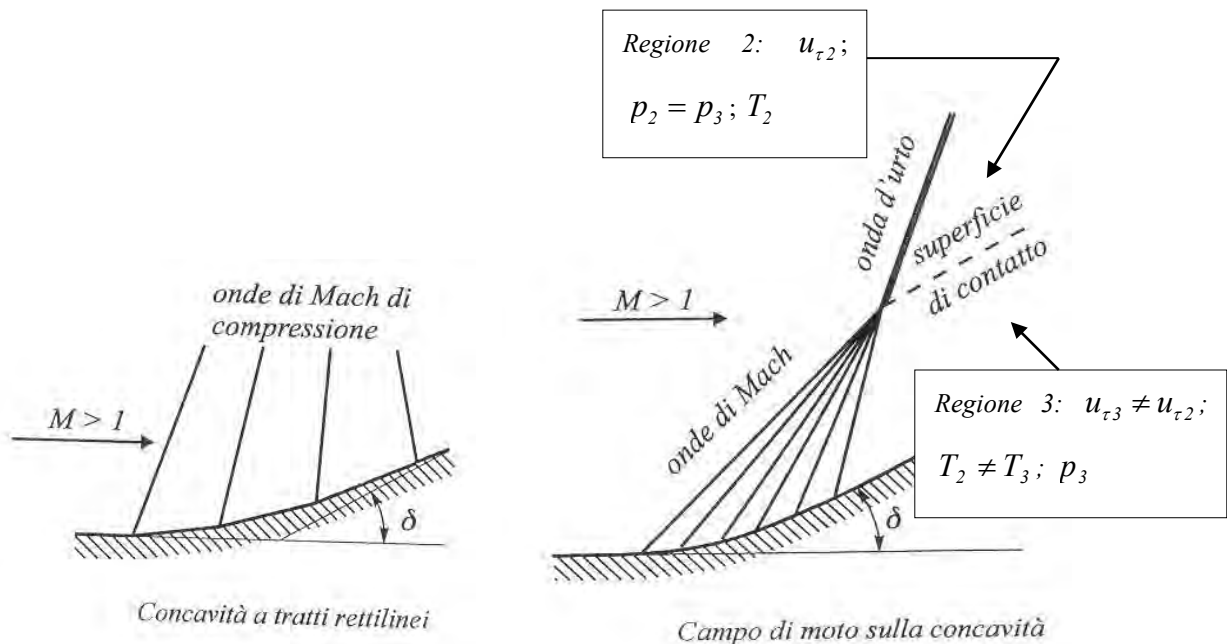
FIGURE
Attached and detached shocks.

6.6.2 Onde di espansione di Prandtl-Meyer

Nel capitolo precedente si è visto che, quando una corrente supersonica che fluisce su una parete devia per la presenza di un angolo concavo della superficie, tale deviazione è resa possibile da un'onda d'urto obliqua. Analizzeremo ora il comportamento di una corrente supersonica nel caso in cui l'angolo formato dalla parete è convesso (discontinuità geometrica con punto angoloso con $\delta < 0$) anziché concavo.

Se si considera una parete concava ($\delta > 0$) con una curvatura che dà luogo ad una deviazione finita δ come quella indicata nella seguente figura, la curvatura continua può essere approssimata da un numero n molto grande di piccoli tratti rettilinei ciascuno inclinato rispetto al precedente di un piccolo angolo $\Delta\delta$ ($\Delta\delta = n\delta$), per cui l'effetto della corrente è quello che, da ciascun punto angoloso, partirà un'onda di Mach di compressione. È facile convincersi che, in questo caso le onde di Mach di compressione tendono a coalescere sia perché la parete ruota verso il fluido, sia perché l'angolo μ che esse formano localmente con la parete stessa tende ad aumentare a causa della progressiva diminuzione del numero di Mach della corrente. Si ricordi, infatti, che una compressione dà luogo ad una decelerazione, e quindi ad una diminuzione del numero di Mach della corrente, e che, dopo ogni rotazione della corrente susseguente ad un'onda, l'angolo μ è misurato rispetto ad una nuova direzione della velocità della corrente stessa corrispondente al numero di Mach a valle dell'onda. In effetti ad ogni rotazione infinitesima $d\delta$ della parete corrisponde un'onda di Mach e poiché sono necessarie infinite rotazioni infinitesime per dare luogo ad una deviazione finita δ , le onde di Mach che si generano sono anch'esse infinite.

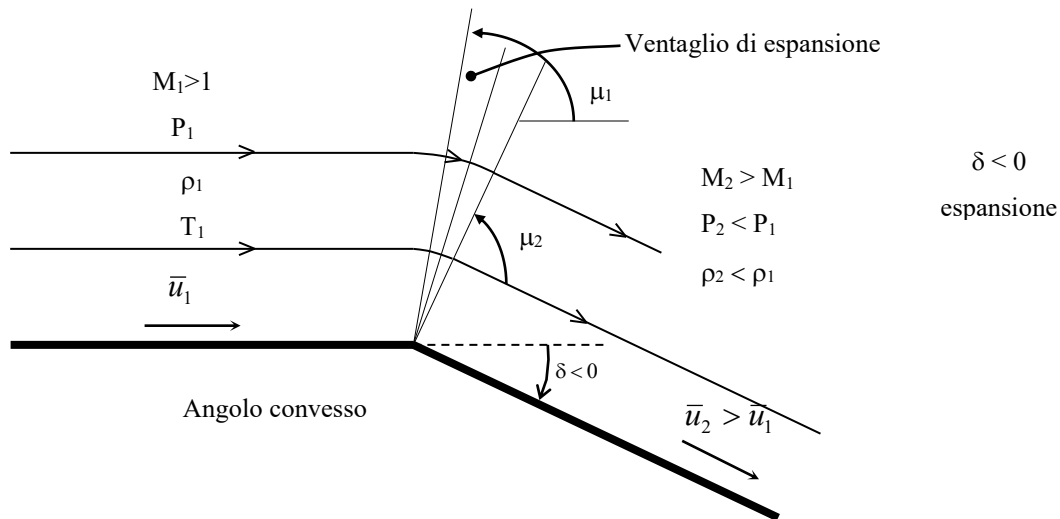
Ad una certa distanza dalla parete, così come rappresentato in modo schematico nella seguente figura, la coalescenza delle onde di Mach dà luogo ad un'onda d'urto.



Per il caso esposto nella precedente figura, è importante notare che il fluido, che attraversa le (infinite) onde di Mach (ciascuna delle quali devia la corrente di un angolo infinitesimo $d\delta$), è soggetto ad una trasformazione isentropica (perché ciascuna onda di Mach è isentropica) mentre ciò non è vero per il fluido che attraversa l'onda d'urto nella quale vi è produzione di

entropia. La superficie di contatto (meglio, zona di contatto) tratteggiata in figura, indica la superficie di separazione tra i due flussi.

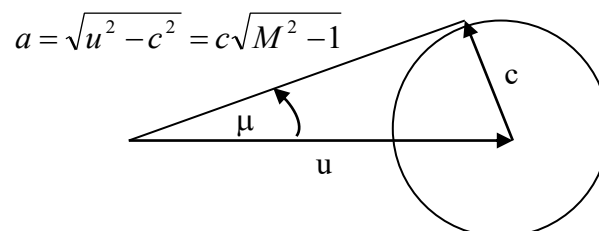
Se ora, invece si considera una parete convessa ($\delta < 0$) avente una curvatura continua, la rappresentazione approssimata delle onde di Mach diventa quella illustrata nella figura seguente. Le *onde di Mach* sono onde di espansione poiché i piccoli angoli $\Delta\delta$ sono negativi e quindi la corrente tende ad accelerare. In questo caso si forma quindi un ventaglio di espansione, il gas accelera e si espande in modo isentropico come avviene in un ugello supersonico. L'*onda di Mach* è *isentropica* e, quindi, *reversibile*: può produrre al più variazioni infinitesime dello stato termofluidodinamico. Si può dimostrare che non sono possibili discontinuità di espansione (ved. 6.4.1 e 6.4.5).



Di nuovo, è facile convincersi che, in questo caso, le onde di Mach di espansione sono divergenti tra loro sia perché la parete ruota allontanandosi dal fluido, sia perché l'angolo μ che esse formano localmente con la parete stessa tende a diminuire a causa del progressivo aumento di Mach conseguente all'espansione. L'insieme delle onde di espansione, che per una deviazione finita si chiama *ventaglio di espansione*. La relativa evoluzione del fluido, che è isentropica perché ciascuna onda di Mach è isentropica, viene denominata *espansione alla Prandtl e Meyer*.

Nel caso della precedente figura in cui la parete è convessa per la presenza di un solo punto angoloso, tutte le onde di espansione hanno origine in detto punto angoloso. Inoltre, nel caso in cui sia $M_1=1$, la prima onda di Mach che incontra la corrente deve necessariamente essere ortogonale alla corrente stessa, ciò perché il numero di Mach normale a questa onda deve essere unitario.

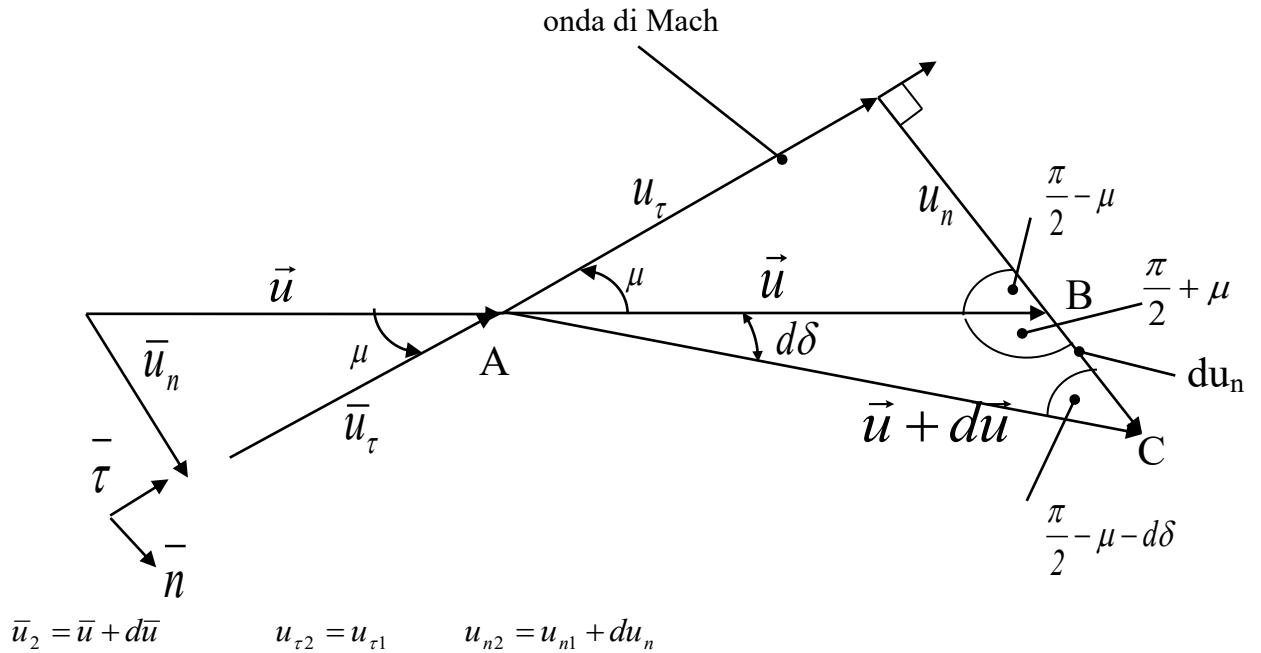
Facciamo ora le seguenti considerazioni :



$$\operatorname{sen} \mu_1 = \frac{1}{M_1}; \quad \operatorname{sen} \mu_2 = \frac{1}{M_2} \quad \text{dove } M_2 \text{ e } \mu_2 \text{ sono incognite}$$

$$a = \sqrt{u^2 - c^2} = c\sqrt{M^2 - 1} \quad \text{pertanto} \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (6.138)$$

La deviazione ed accelerazione della corrente per $\delta < 0$ avviene in modo continuo ed isentropico.



$$\rho_1 u_{n1} = \rho_2 u_{n2} \quad u_{\tau 2} = u_{\tau 1} \quad \rho_1 u_{n1}^2 + P_1 = \rho_2 u_{n2}^2 + P_2$$

Dalla figura precedente si può notare che:

$$u_{\tau} \operatorname{tg} \mu = u_n \Rightarrow u_{\tau}^2 + u_n^2 = u^2 = u_{\tau}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \mu) \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \mu = \frac{u^2}{u_{\tau}^2}$$

Poiché il processo di deviazione e accelerazione è continuo bisogna creare un'equazione differenziale che leghi dS e du .

Dal teorema dei seni applicato al triangolo ABC si ha:

$$\frac{u + du}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)} = \frac{u}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\delta\right)} \quad (6.139)$$

ma

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) = \cos \mu \quad (6.140)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\delta\right) = \cos(\mu + d\delta) = \cos \mu \cos d\delta - \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} d\delta \cong \cos \mu - d\delta \operatorname{sen} \mu \quad (6.141)$$

$$\frac{u + du}{u} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\delta\right)} \cong \frac{\cos \mu}{\cos \mu - d\delta \operatorname{sen} \mu} = \frac{1}{1 - d\delta \operatorname{tg} \mu} \cong 1 + d\delta \operatorname{tg} \mu \quad (6.142)$$

$$\frac{u + du}{u} = \frac{I}{1 - \frac{d\delta}{A}} = \frac{A}{A - d\delta}$$

$$\left(1 + \frac{du}{u}\right) \left(1 - \frac{dS}{A}\right) = 1$$

$$1 + \frac{du}{u} - \frac{dS}{A} - \frac{dS \cdot du}{A \cdot u} = 1 \quad \text{poiché} \quad \frac{dS \cdot du}{A \cdot u} \rightarrow 0 \quad \text{si ha:}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dS}{A}$$

$$dS = \frac{A}{u} du = \sqrt{M^2 - 1} \frac{du}{u} \quad (6.143)$$

$$\text{come detto precedentemente} \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{I}{\sqrt{M^2 - 1}} = \frac{I}{A} \quad (6.144)$$

e quindi

$$d\delta = \frac{du}{u} \sqrt{M^2 - 1} \quad (6.145)$$

che è l'equazione differenziale cercata.

$$\text{Ricordandosi che} \quad M = \frac{u}{c} \quad \Rightarrow \quad u = cM \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{dc}{c} + \frac{dM}{M} \quad (6.146)$$

Poiché

$$\frac{\gamma RT}{\gamma RT_i} = H(M) \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{c_i^2} = H(M) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad c^2 = c_i^2 H(M)$$

$$dc^2 = c_i^2 dH \quad \Rightarrow \quad 2c \, dc = c_i^2 \frac{dH}{dM} dM$$

$$\text{Sapendo che} \quad \frac{dH}{dM} = -\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-2} \frac{\gamma - 1}{2} 2M = -2M \frac{\gamma - 1}{2} H^2$$

ed andando a sostituirla nell'equazione precedente, ottengo

$$2c \, dc = c_i^2 \left(-2M \frac{\gamma-1}{2} H^2 \right) dM \quad \text{ma poiché} \quad c_i^2 = \frac{c^2}{H}$$

sostituendo questa ed effettuando alcune banali semplificazioni, si ottiene che

$$\frac{dc}{c} = -M \frac{\gamma-1}{2} H \, dM.$$

Poiché, come detto, $\frac{du}{u} = \frac{dc}{c} + \frac{dM}{M} \Rightarrow$

$$\frac{du}{u} = \left(-M \frac{\gamma-1}{2} H + \frac{1}{M} \right) dM = \left[\frac{1}{M} \left(1 - M^2 \frac{\gamma-1}{2} H \right) \right] dM$$

Essendo $d\delta = \frac{du}{u} \sqrt{M^2 - 1}$, posso andare a sostituire il risultato precedente ed

ottenere, $d\delta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \left(1 - M^2 \frac{\gamma-1}{2} H(M) \right) dM = R(M) dM$

avendo posto

$$R(M) = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \left(1 - M^2 \frac{\gamma-1}{2} H(M) \right) = \sqrt{\frac{M^2 - 1}{M}} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 - \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}$$

Andando ad integrare nell'intervallo compreso tra 0 e δ , si ha che

$$\delta = \int_0^\delta d\delta = \int_{M_1}^M R(M) dM = v(M) - v(M_1)$$

nella quale $v(M) =$ *funzione di Prandtl-Meyer*.

Esempio dalla tabella:

$\delta = v(M) - v(M_1) \Rightarrow$ noto M_1 e $\delta \Rightarrow$ calcolo $M_2 \Rightarrow$ calcolo $T_2 \Rightarrow P_2, \rho_2, u_2$
oppure

noto M_1 e $M_2 \Rightarrow$ calcolo $\delta \Rightarrow$ calcolo $T_2 \Rightarrow P_2, \rho_2, u_2$

Per $M_1=2 \Rightarrow v_1=26.3 \Rightarrow \mu_1=30^\circ$

$M_2=3.5 \Rightarrow v_2=58.5 \Rightarrow \mu_2=16.6^\circ$

$\delta = 58.5^\circ - 26.3^\circ = 22.2^\circ$

Concludendo, si comprende ormai che per angoli $d\delta$ positivi (parete concava) la corrente subisce una diminuzione (infinitesima) della sua velocità ($du < 0$) e quindi del suo numero di Mach. Viceversa, per angoli $d\delta$ negativi (parete convessa), la corrente supersonica accelera ($du > 0$) ed il suo numero di Mach aumenta. Nel primo caso (decelerazione) la corrente è soggetta ad una compressione (infinitesima), mentre nel secondo caso (accelerazione) ad un'espansione.

Un'onda di Mach di espansione ($du > 0$) dà luogo ad un $d\delta$ negativo per cui la corrente tende (sia pure con una rotazione infinitesima) ad *allontanarsi* dall'onda. Viceversa, per un'onda di Mach di *compressione* ($du < 0$), il $d\delta$ è positivo e la corrente tende ad adagiarsi sull'onda così come avviene nel caso più generale di un'onda d'urto obliqua.

Osservazioni:

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$
 è detta *equazione differenziale del moto alla Prandtl e Meyer*

nella quale ovviamente per la stabilità termodinamica si ha che $\gamma > 1$.

L'integrale della precedente equazione conduce a:

$$\delta = -\sqrt{k} \arctan \sqrt{\frac{M^2 - 1}{k}} + \arctan \sqrt{M^2 - 1} + c$$

con $k = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$

in cui la costante di integrazione (c) può essere determinata assegnando un valore di δ per un determinato valore di M .

Occorre ora osservare che le onde di Mach sono presenti in una corrente solo in condizioni non subsoniche e cioè per $M \geq 1$ perché per valori di $M < 1$, non dà luogo a soluzioni nel campo dei numeri reali.

Risulta allora conveniente porre $\delta = 0$ per $M = 1$ da cui si ottiene $c = 0$. Con tale posizione, l'espansione in serie arrestata al secondo termine per $M^2 \rightarrow 1$ conduce a valori negativi di δ .

Per $M^2 \rightarrow \infty$ si ottiene:

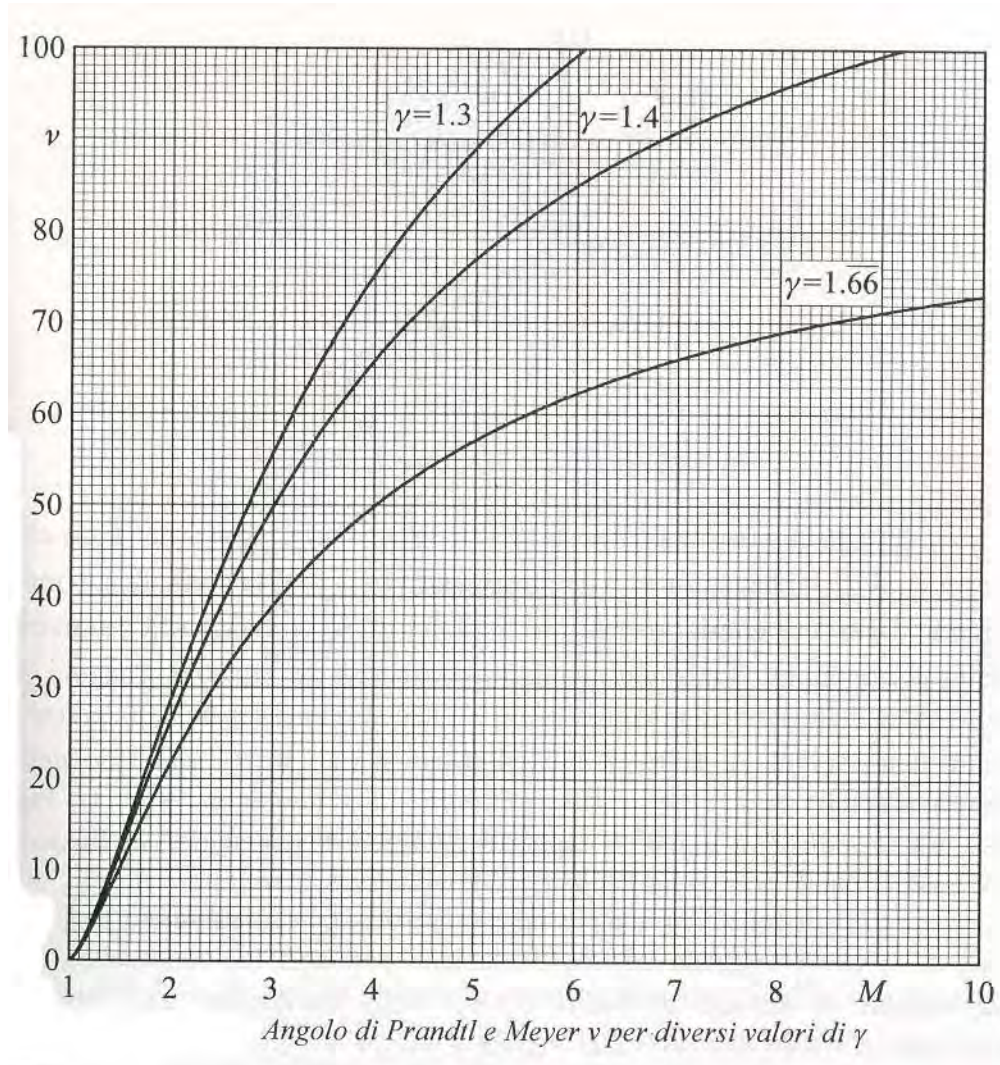
$$\delta_{\text{lim}} = -\frac{\pi}{2} (\sqrt{k} - 1) < 0$$

(per $\gamma = 1.4$ si ha $\delta_{\text{lim}} = -130.45^\circ$)

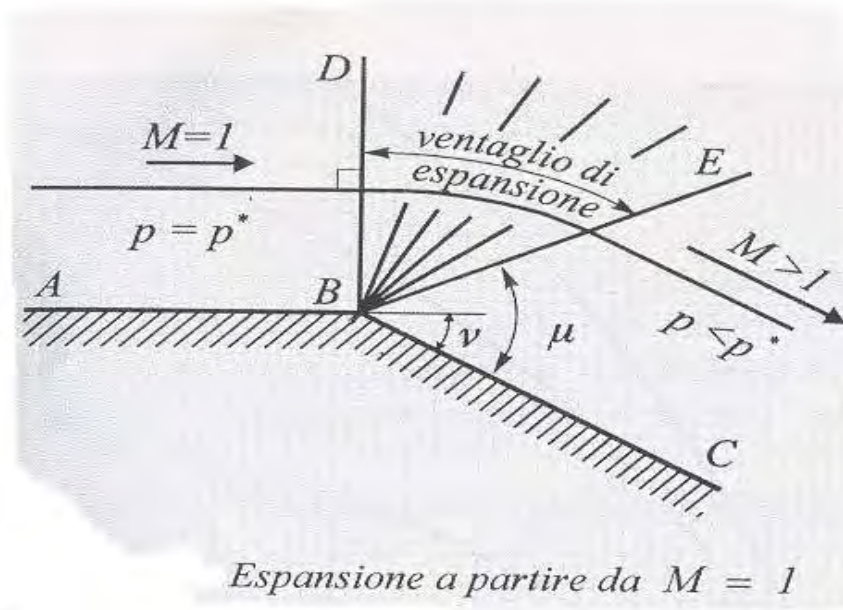
Poiché le situazioni d'interesse sono quelle con valori negativi di δ , è conveniente porre $v = -\delta$ trattando, quindi, solo valori positivi di v :

$$\nu = \sqrt{k} \arctan \sqrt{\frac{M^2 - 1}{k}} + \arctan \sqrt{M^2 - 1}$$

L'angolo ν è chiamato *angolo di Prandtl e Meyer* ed è diagrammato nella seguente figura per tre diversi valori di γ e quindi di k .



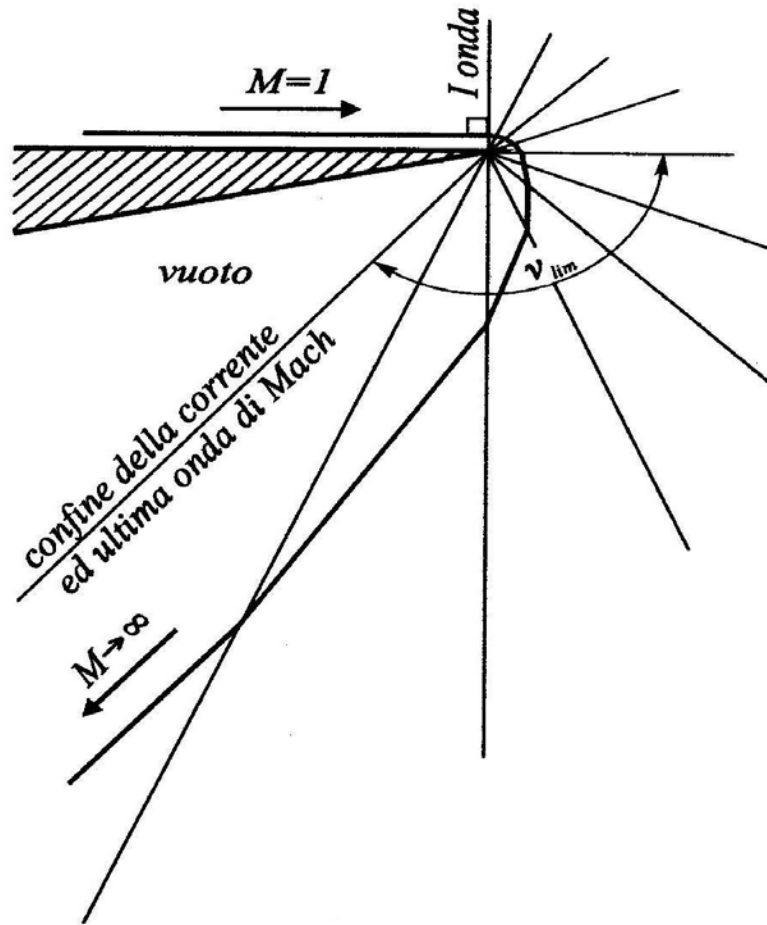
Per come è stato ricavato (ponendo $v=0$ per $M=1$), l'angolo di Prandtl e Meyer ha il seguente significato fisico rappresentato nella seguente figura:



Si supponga di avere una corrente sonica ($M=1$) che fluisca parallelamente ad una parete AB. L'angolo ν , dato dall'equazione precedente, è quello di cui bisogna ruotare la parete (formando una convessità) affinché la corrente passi dal numero di Mach sonico che aveva sulla parete AB al numero di Mach supersonico $M>1$ sulla parete BC. La prima *onda di Mach* BD del ventaglio di espansione è ortogonale alla corrente (sonica); l'ultima onda di Mach BE è inclinata rispetto alla direzione locale della corrente dell'angolo $\mu = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right)$.

La condizione innanzi posta $\nu < -\delta_{\text{lim}} = \nu_{\text{lim}}$ deriva dal fatto che per $\nu = \nu_{\text{lim}}$ si ha $M \rightarrow \infty$ e di conseguenza $p \rightarrow 0$; la corrente non può, quindi espandere ulteriormente al di là di ν_{lim} .

Se comunque la geometria della discontinuità è tale che, come rappresentato dalla seguente figura, l'angolo di convessità della parete è maggiore di ν_{lim} , la corrente si separa dalla parete a valle dello spigolo e l'ultima onda di Mach ha la stessa direzione della corrente poiché per $M \rightarrow \infty$ si ha $M \sin \mu = 1$ e quindi $\mu \rightarrow 0$.

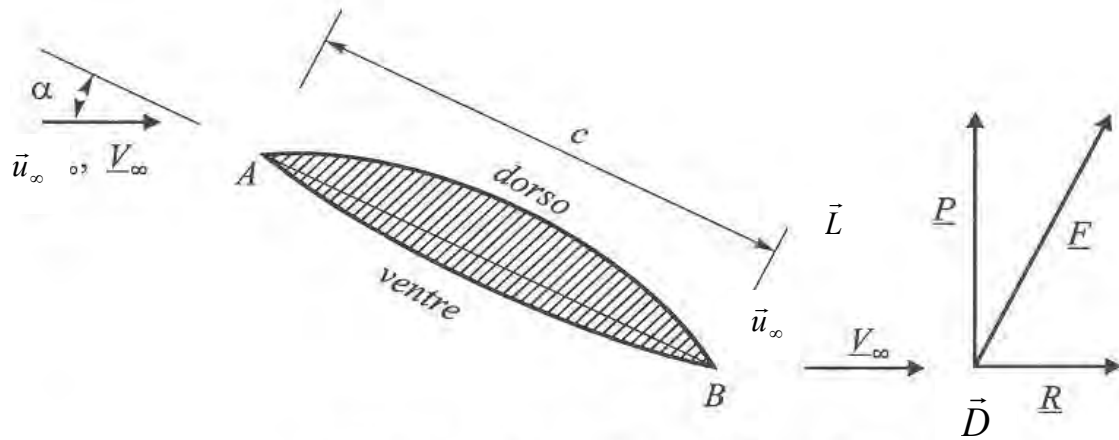


Espansione da $M = 1$ fino a $M \rightarrow \infty$

Il metodo urto-espansione: applicazione ad un profilo supersonico

Una interessante applicazione delle teorie dell'*onda d'urto obliqua* e dell'*espansione di Prandtl e Meyer* è quella relativa alla *determinazione della portanza e della resistenza di profili alari bidimensionali supersonici* con il metodo cosiddetto *urto-espansione*. Questo metodo consente di calcolare queste due quantità ma non permette di valutare la resistenza viscosa del profilo. Va comunque osservato che la conoscenza della distribuzione di pressione sul profilo, cui il metodo conduce, è il primo passo per la determinazione della resistenza viscosa.

Si consideri il profilo alare bidimensionale rappresentato nella seguente figura.



Profilo alare bidimensionale ad angolo di attacco

Il punto A del profilo è chiamato *bordo d'attacco* mentre il punto B *bordo di uscita*. Il segmento AB rappresenta la *corda* c del profilo e l'angolo α , che esso forma con la corrente indisturbata avente velocità u_∞ , si chiama *angolo di attacco* del profilo rispetto alla corrente, che, nel caso rappresentato in figura, risulta positivo per convenzione. La superficie superiore del profilo da A a B si chiama *dorso*, mentre quella inferiore *ventre* del profilo.

E' anche convenzione scomporre la forza \bar{F} (*Resultant aerodynamic force*) che la corrente esercita sul profilo nelle sue due componenti \bar{D} (*Drag*), la *resistenza* nella direzione di u_∞ , e \bar{L} (*Lift*), la *portanza* in direzione normale a u_∞ .

$$\bar{F} = \bar{L} + \bar{D}$$

Portanza e resistenza sono considerate positive quando hanno il verso indicato nella figura. La resistenza è di per sé sempre positiva, mentre la portanza può risultare anche negativa cioè diretta verso il basso (profilo deportante).

E' inoltre convenzione porre *portanza* e *resistenza* nella seguente forma:

$$L = \frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2 c C_p \quad (\text{Lift})$$

$$D = \frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2 c C_r \quad (\text{Drag})$$

in cui l'area in pianta d'ala è rappresentato dal prodotto $c \times 1$ (cioè essa è riferita ad una superficie avente apertura alare del profilo uguale all'unità nella direzione normale al foglio) e le quantità C_L e C_D sono rispettivamente dette *coefficienti di portanza* e *coefficiente di resistenza* del profilo.

Poiché nel caso di *gas perfetto* ($P = \rho RT$) è possibile scrivere

$$\rho_\infty u_\infty^2 = \rho_\infty a_\infty^2 M_\infty^2 = \gamma RT_\infty \rho_\infty M_\infty^2 = \gamma p_\infty M_\infty^2$$

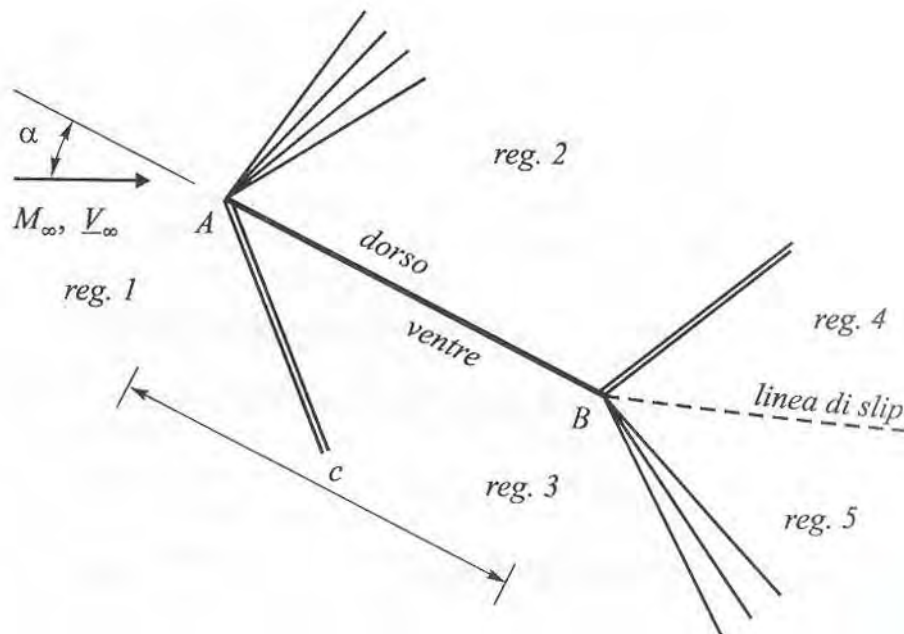
le definizioni dei *coefficienti di portanza* e di *resistenza* risultano essere rispettivamente:

$$C_L = \frac{2P}{\rho_\infty u_\infty^2 c} = \frac{2P}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c}$$

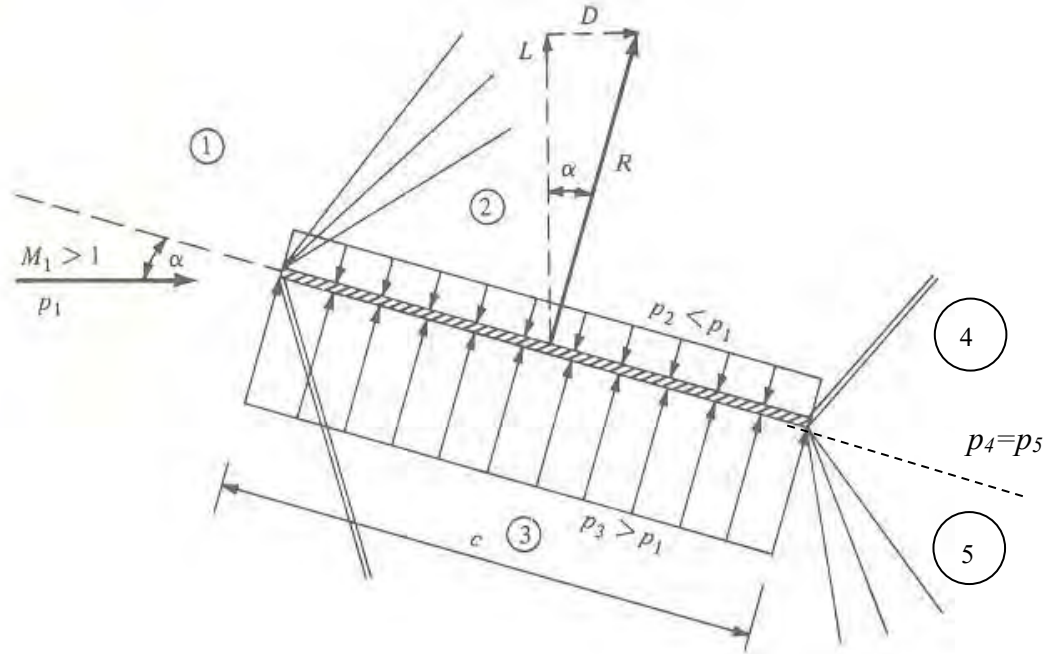
$$C_D = \frac{2R}{\rho_\infty u_\infty^2 c} = \frac{2R}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c}$$

Il motivo per cui si introducono i *coefficienti di portanza* e di *resistenza* risiede fondamentalmente nella necessità di poter confrontare le prestazioni di profili alari aventi dimensioni e quota di volo (pressione ambiente) diverse tra loro. Infatti, profili aventi geometrie simili, ancorché di dimensioni diverse, ad uguale angolo di attacco e allo stesso numero di Mach, trascurando gli effetti viscosi, hanno gli stessi C_L e C_D ma, evidentemente, diversa *portanza* e *resistenza*. I coefficienti, difatti, non dipendono dalla corda né tanto meno dalla quota di volo, bensì, fissato l'*angolo di incidenza* α , solo dai numeri di Mach e Reynolds.

Si consideri ora come profilo alare una **lastra piana**, di spessore infinitamente sottile, posta ad un angolo di attacco positivo α rispetto ad una corrente supersonica avente numero di Mach pari a M_∞ .



Lastra piana in una corrente supersonica



Flat plate at an angle of attack in a supersonic flow.

Poiché sul bordo di attacco A del profilo la corrente supersonica trova una convessità nella parte superiore ed una concavità in quella inferiore, è chiaro che dal bordo d'attacco partiranno una *espansione di Prandtl e Meyer* verso l'alto ed un'onda d'urto obliqua debole verso il basso. Il risultato di tutto ciò sarà una diminuzione della pressione sul dorso del profilo (regione 2) ed un aumento della stessa sul ventre (regione 3); quindi il profilo avrà una *portanza* positiva oltre che una *resistenza* anch'essa ovviamente positiva.

Le due correnti supersoniche nelle regioni 2 e 3 avranno, pertanto, la stessa direzione ma due diverse pressioni ($p_3 > p_2$). Risulta quindi necessario che dal bordo di uscita B del profilo partano un'onda d'urto verso l'alto (che faccia aumentare la pressione) ed un ventaglio di espansione verso il basso (che la faccia diminuire), in modo che le due correnti che abbandonano il profilo, ancorché con velocità tra loro diverse in modulo ma uguali in direzione, raggiungono la stessa pressione ($p_4 = p_5$).

In questo semplice caso, la portanza e la resistenza per unità di apertura alare saranno date da:

$$F = (p_3 - p_2)c$$

$$L = (p_3 - p_2)c \cos \alpha$$

$$D = (p_3 - p_2)c \sin \alpha$$

in cui le quantità $c \cos \alpha$ e $c \sin \alpha$ rappresentano le due proiezioni della superficie alare in direzione normale alla *portanza* e normale alla *resistenza* rispettivamente.

Sostituendo le espressioni appena trovate nelle precedenti equazioni si ottengono i *coefficienti di portanza e resistenza* del profilo:

$$C_L = \frac{2P}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_3}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \cos \alpha$$

$$C_D = \frac{2R}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_3}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \sin \alpha = C_P \tan \alpha$$

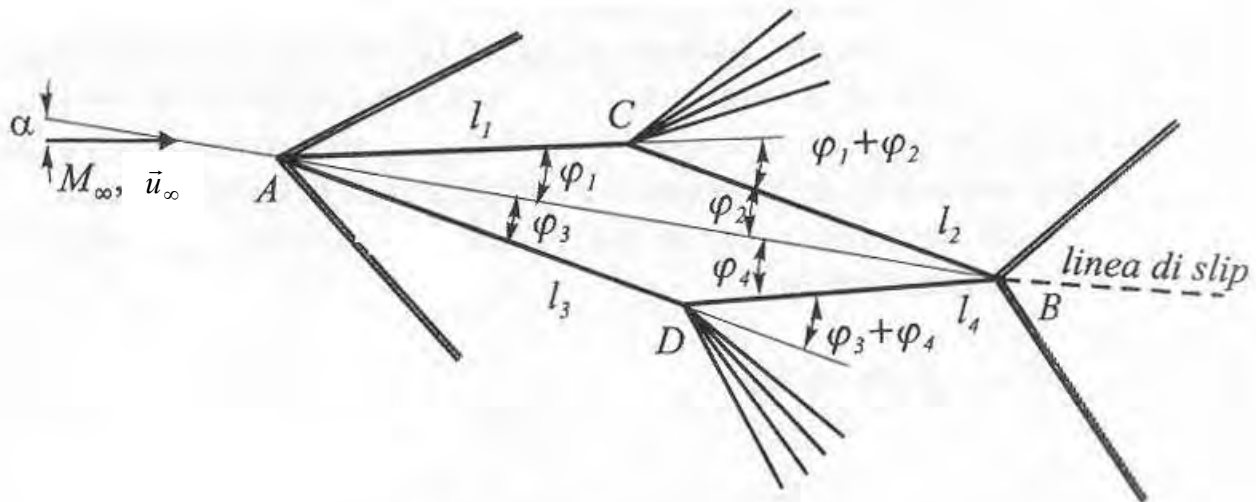
che ovviamente si annullano entrambi per $\alpha=0$ in quanto in questo caso $p_2 = p_3 = p_\infty$.

In generale le quantità $\frac{p_2}{p_\infty}$ e $\frac{p_3}{p_\infty}$ dipenderanno, invece, da γ , M_∞ ed α .

Come detto in precedenza e come si può notare dalle precedenti espressioni di C_L e C_D risultano indipendenti dalla corda c e dalla pressione ambiente.

Qui di seguito si considera il caso di un profilo alare a sezione quadrilatera (vedi figura seguente) del quale si suppongono note le caratteristiche geometriche c , φ_1 , φ_2 , φ_3 , e φ_4 , posto in una corrente supersonica (caratterizzata da γ e M_∞) ad un angolo d'attacco α . Gli angoli φ_i sono considerati positivi nei versi mostrati in figura.

L'onda d'urto in basso a destra potrebbe essere, in alcuni casi sostituita da un ventaglio di espansione.



Profilo alare a sezione quadrilatera

Il teorema dei seni, applicato ai due triangoli in cui è possibile scomporre il quadrilatero diviso dalla corda, conduce a:

$$l_1 = \frac{\sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} c \quad l_2 = \frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} c$$

$$l_3 = \frac{\sin \varphi_4}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)} c \quad l_4 = \frac{\sin \varphi_3}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)} c$$

La configurazione fluidodinamica per $\alpha < \varphi_1$ è quella rappresentata nella figura precedente in cui le onde d'urto oblique che partono dal bordo di attacco A del profilo sono dovute alla deviazione della corrente verso l'alto della quantità $(\varphi_1 - \alpha)$ ed a quella verso il basso di $(\varphi_3 + \alpha)$. I due ventagli di espansione che partono dai punti C e D sono dovuti alle due convessità qui presenti.

La portanza P e la resistenza R delle superfici 1, 2, 3 e 4 sono date da:

$$L_1 = -p_1 l_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) \quad D_1 = p_1 l_1 \sin(\varphi_1 - \alpha)$$

$$L_2 = -p_2 l_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \quad D_2 = -p_2 l_2 \sin(\varphi_2 + \alpha)$$

$$L_3 = p_3 l_3 \cos(\varphi_3 + \alpha) \quad D_3 = p_3 l_3 \sin(\varphi_3 + \alpha)$$

$$L_4 = p_4 l_4 \cos(\varphi_4 + \alpha) \quad D_4 = p_4 l_4 \sin(\varphi_4 + \alpha)$$

in cui p_1, p_2, p_3 e p_4 sono le pressioni sulle superfici di lati l_1, l_2, l_3 ed l_4 rispettivamente.

Sostituendo le relazioni precedenti nelle espressioni delle definizioni dei coefficienti C_L e C_D si trovano quattro regioni ($i=1,2,3,4$) in cui

$$C_L = C_L(\varphi_i, \alpha, M_\infty)$$

$$C_D = C_D(\varphi_i, \alpha, M_\infty)$$

che, come si può notare ancora una volta, non dipendono né dalla corda c né da p_∞ .

Nel caso in cui $\alpha > \varphi_1$, l'onda d'urto obliqua che parte dal bordo di attacco A del profilo verso l'alto deve essere sostituita da un ventaglio di espansione perchè la concavità che la corrente qui incontra per $\alpha < \varphi_1$ viene rimpiazzata da una convessità.

6.7 Flussi non isentropici di un gas ideale (*leggere*)

Per studiare dei casi più vicini alla realtà, consideriamo il flusso non isentropico di un gas ideale in un condotto. La non isentropicità può essere dovuta agli effetti dell'attrito o a scambi di calore (non adiabaticità). Per semplicità studieremo i due effetti separatamente e considereremo sempre dei condotti a sezione costante. I casi che consideriamo sono classificati come:

Flussi di Fanno: flusso di un gas ideale in un condotto a sezione costante, adiabatico, con attrito.

Flussi di Rayleigh: flusso di un gas ideale in un condotto a sezione costante, non adiabatico, senza attrito (ma con scambio di calore).

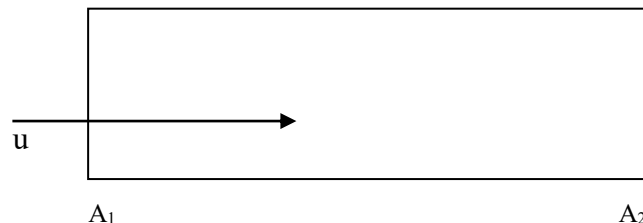
6.7.1 Flussi di Fanno

Come detto, consideriamo un condotto a sezione costante adiabatico in cui le forze di attrito non sono trascurabili. L'effetto delle forze di attrito ovviamente influenza la legge di conservazione della quantità di moto. Si introducono due diversi approcci di studio:

- 1) globale, per il calcolo dell'entropia nota la temperatura
- 2) locale in forma differenziale, che relaziona l'aumento di entropia e la variazioni delle altre quantità con il coefficiente di attrito. Con questo approccio è anche possibile determinare le variazioni delle quantità termodinamiche di interesse lungo il condotto.

6.7.1.1 Approccio globale

L'equazione di conservazione dell'energia per modelli quasi unidimensionali, per gli urti e quindi anche per modelli unidimensionali (eq. 6.49) in un volume di controllo generico darà:



$$T + \frac{u^2}{2c_p} = T_t = \text{cost} \quad (6.49)$$

$$\frac{u^2}{2c_p} = T_t - T; \quad u^2 = 2c_p(T_t - T); \quad u = \sqrt{2c_p(T_t - T)}; \quad \frac{u}{\sqrt{2c_p(T_t - T)}} = 1 \quad (6.77)$$

che indica che la temperatura totale resta costante. Usando l'equazione di stato, la relazione precedente diventa:

$$p = \rho RT = \frac{\rho RT u}{\sqrt{2c_p(T_t - T)}} = \frac{\rho_1 u_1 RT}{\sqrt{2c_p(T_t - T)}} \quad (6.137)$$

tenendo conto che la continuità ci dà $\rho_1 u_1 = \text{cost.}$

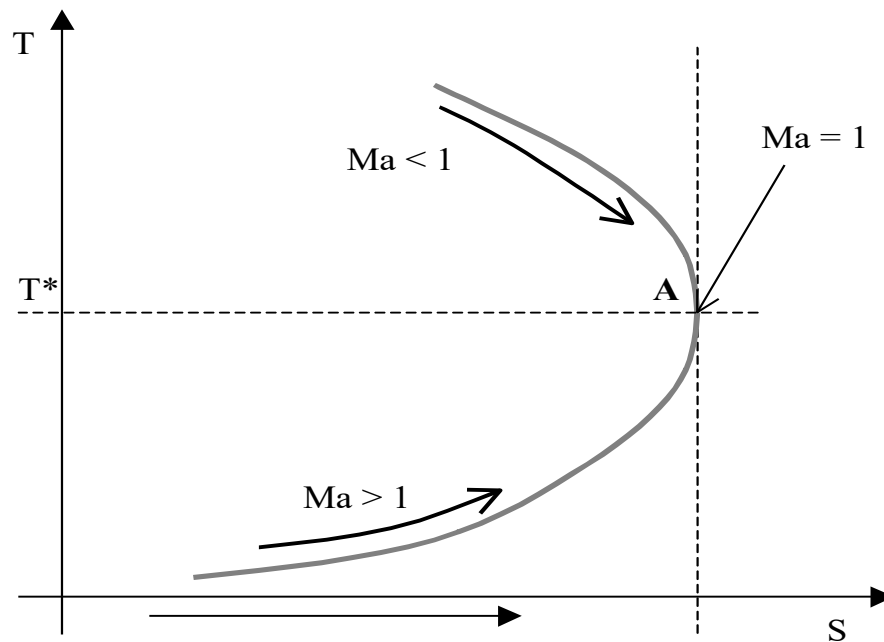
Consideriamo l'equazione della variazione di entropia riferita alla sezione A₁:

$$S - S_1 = c_p \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{P}{P_1}\right) \quad (6.138)$$

Combinando la (6.137) con (6.138), eliminando la pressione e tenendo conto che $\rho u = \text{cost.}$, si ottiene una relazione funzionale del tipo:

$$F(S, T) = 0$$

che nel piano T, S rappresenta una curva detta linea di Fanno:



Una volta fissato il tipo di fluido (R, c_p, γ), i valori di T_t e ρu e le condizioni iniziali (T_t, P_t, S_t), la curva che si ottiene è unica. Si può dimostrare che nel punto **A** il numero di Mach è unitario e quindi tutte le grandezze sono critiche (T^*). Inoltre, nel caso di flusso reale (con attrito), l'evoluzione può andare solo verso S crescente (non ci sono scambi di calore). Di conseguenza, il ramo superiore della curva che dà una diminuzione della temperatura fino al valore critico e quindi (dalla 6.49) un aumento di velocità, deve corrispondere al flusso subsonico ($Ma < 1$). Al contrario il ramo inferiore (che dà un aumento di temperatura) corrisponde al flusso supersonico ($Ma > 1$). Di conseguenza, poiché si deve avere sempre $\Delta S > 0$ (ricordiamo la (3.59), l'attrito tenderà a far accelerare un flusso subsonico e a far decelerare un flusso supersonico.

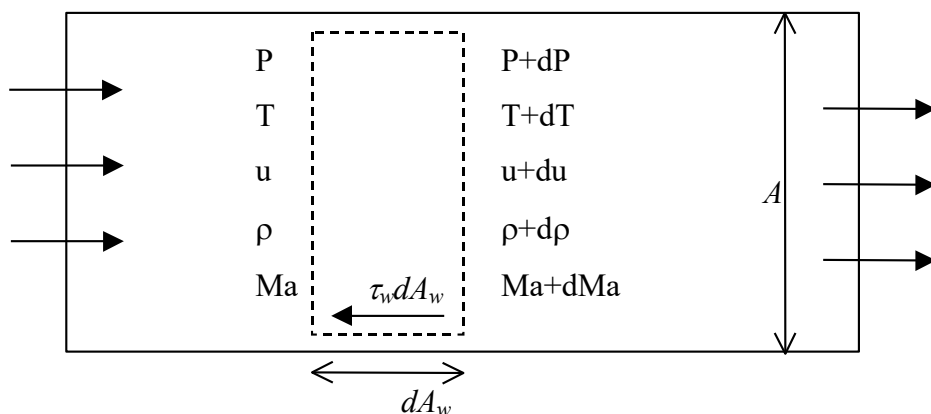
6.7.1.2 Approccio locale

Vediamo ora come si può studiare il problema in maggiore dettaglio mediante uno studio locale lungo il condotto delle quantità fluidodinamiche di interesse in funzione del coefficiente di attrito (frizione, ved. Cap. 1.5):

$$C_\tau = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2} \quad (6.139)$$

e del numero di Ma locale.

Consideriamo un volume di controllo semi-infinitesimo (l'area A resta finita, mentre la superficie laterale dA_w è infinitesima)



Le equazioni da utilizzare sono quelle per il modello unidimensionale (U) viste al Cap. 6.3.2, in quanto il condotto è a sezione costante (eq. 6.49, 6.50 e 6.54) con l'equazione di stato (6.12) e la definizione del numero di Mach e di velocità del suono (eq. 6.1 e 6.2). Si ottiene un sistema di 6 equazioni differenziali in 7 incognite in modo da poter esprimere la variazione delle quantità termodinamiche in funzione dell'ascissa nel condotto, essendo noto il $C_\tau(x)$.

A) Equazione di stato dei gas (6.12) in forma differenziale come descritto al cap. (6.3.3):

$$\boxed{\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}} \quad (6.140)$$

B) Definizione del numero di Mach (eq. 6.2) e di velocità del suono (eq. 6.1):
differenziando la

$$Ma^2 = \frac{u^2}{\gamma RT}$$

si ottiene:

$$\boxed{\frac{dMa^2}{Ma^2} = \frac{du^2}{u^2} - \frac{dT}{T}} \quad (6.141)$$

C) Equazione dell'energia (6.49) per il caso di flusso stazionario

$$c_p dT + d\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

da cui dividendo per $c_p T$ e tenendo conto che $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ (eq. 6.3) si ottiene:

$$\frac{dT}{T} + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) \frac{1}{\gamma RT} du^2 = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{\frac{dT}{T} + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) Ma^2 \frac{du^2}{u^2} = 0} \quad (6.142)$$

D) Equazione di conservazione della massa (6.50) in forma differenziale

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{u^2} = 0} \quad (6.143)$$

E) Equazione di conservazione della quantità di moto (6.54) nel volume di controllo infinitesimo (tenendo conto della conservazione della massa):

$$\begin{aligned} AP - A dP - AP - \tau_w dA_w &= \rho u^2 A - \rho u^2 A + \rho u A du \Rightarrow \\ -A dP - \tau_w dA_w &= \rho u A du \end{aligned} \quad (6.144)$$

essendo τ_w gli sforzi di taglio alla parete e dA_w la parete dove essi agiscono (superficie laterale del volumetto di controllo). Ricordando la definizione del coefficiente di attrito

$$C_\tau = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2} \quad (6.139)$$

ed introducendo il diametro idraulico (4 volte l'area diviso il perimetro bagnato):

$$D_i = \frac{4A}{P_b} = \frac{4A}{\frac{dA_w}{dx}} = 4 \frac{A}{dA_w} dx \quad (6.145)$$

Dividiamo la (6.144) per A ed introduciamo le (6.139) ed (6.145):

$$-dP - 4C_\tau \frac{\rho u^2}{2} \frac{dx}{D_i} = \rho u^2 \frac{du}{u}$$

da cui tenendo conto che (eq. 6.1, 6.2, 6.12) $\rho u^2 = \gamma P Ma^2$ si ottiene:

$$\boxed{-\frac{dP}{P} + \frac{\gamma Ma^2}{2} 4 C_\tau \frac{dx}{D_i} + \frac{\gamma Ma^2}{2} \frac{du^2}{u} = 0} \quad (6.146)$$

F) Teniamo conto che nel volumetto la trasformazione può approssimativamente essere considerata un'isentropica. Per cui dal modello unidimensionale, differenziando l'equazione (6.69) si ottiene:

$$\boxed{\frac{dP_t}{P_t} = \frac{dP}{P} + \frac{\gamma \frac{Ma^2}{2}}{1 + Ma^2 \frac{\gamma - 1}{2}} \frac{d(Ma^2)}{Ma^2}} \quad (6.147)$$

Abbiamo quindi ottenuto 6 equazioni che legano tra loro i 7 gruppi:

$$\frac{dT}{T}, \frac{d\rho}{\rho}, \frac{dP_t}{P_t}, \frac{dP}{P}, \frac{d(Ma^2)}{Ma^2}, \frac{du^2}{u^2}, 4 C_\tau \frac{dx}{D_i}$$

Poiché il fenomeno fisico che causa le variazioni delle grandezze termodinamiche è l'attrito, è logico scegliere C_τ come parametro indipendente. Combinando le equazioni (6.140), (6.141), (6.142), (6.143), (6.146), (6.147) si può ottenere il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{T} = F_1(Ma) 4 C_\tau \frac{dx}{D_i} \\ \frac{d\rho}{\rho} = F_2(Ma) 4 C_\tau \frac{dx}{D_i} \\ \frac{dP_t}{P_t} = F_3(Ma) 4 C_\tau \frac{dx}{D_i} \\ \frac{dP}{P} = F_4(Ma) 4 C_\tau \frac{dx}{D_i} \\ \frac{d(Ma^2)}{Ma^2} = F_5(Ma) 4 C_\tau \frac{dx}{D_i} \\ \frac{du}{u} = F_6(Ma) 4 C_\tau \frac{dx}{D_i} \end{array} \right. \quad (6.148)$$

Dove le F_i rappresentano delle funzioni dipendenti solo dal Ma e le equazioni danno l'evoluzione in x (spaziale) delle quantità termodinamiche.

Tenendo conto del II° principio della termodinamica, si può ricavare anche l'andamento locale dell'entropia. Si ottiene dalle (6.107) in forma differenziale:

$$\frac{dS}{R} = - \frac{dP_t}{P_t}$$

da cui

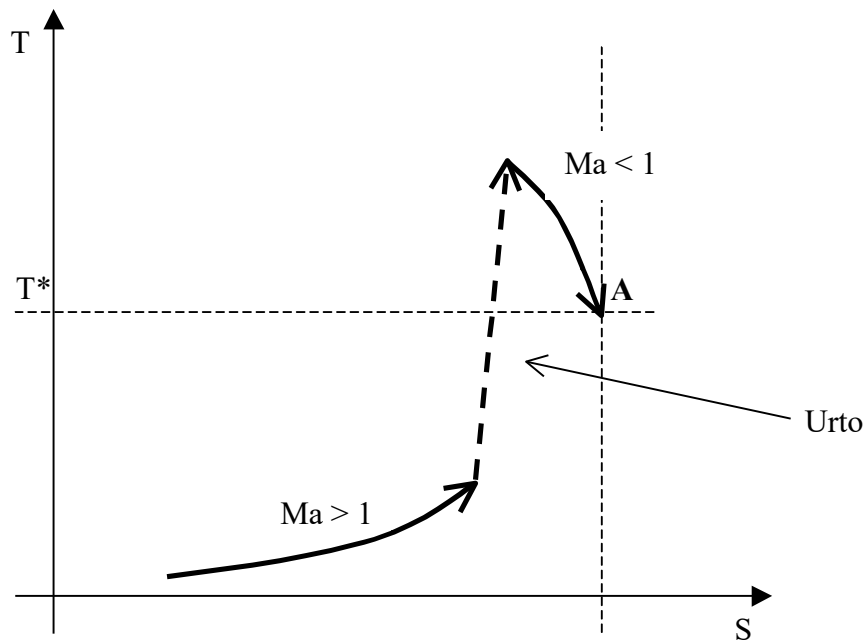
$$dS = F_7(Ma) 4 C_\tau \frac{dx}{D_i} \quad (6.149)$$

Da questa relazione si vede che, essendo $dS > 0$ e poiché risulta (non si presenta la dimostrazione) $F_7(Ma) > 0$, si deve avere che $C_\tau > 0$ cioè il coefficiente di attrito è sempre positivo.

Dalle relazioni (6.148) e (6.149) si può ottenere quantitativamente, tra l'altro, il risultato già visto in precedenza, e cioè che:

- l'attrito accelera (decelera) un flusso subsonico (supersonico)
- l'attrito fa sempre diminuire P_t (sia per un flusso subsonico che supersonico)
- l'attrito fa aumentare P per un flusso supersonico

Come abbiamo già visto, poiché l'attrito fa accelerare un flusso subsonico e decelerare un flusso supersonico, per qualsiasi condizione il Ma tenderà ad 1. Di conseguenza non possono esistere transizioni da $Ma < 1$ a $Ma > 1$. L'effetto contrario si può avere solo in presenza di urti.



Assegnate le condizioni in ingresso, esisterà una lunghezza massima del condotto L_{max} che, in assenza di discontinuità (urti), rappresenta la lunghezza del condotto necessaria perché il flusso (sia esso subsonico o supersonico) raggiunga le condizioni di soffocamento ($Ma = 1$) senza che vengano alterate le condizioni in ingresso. Le equazioni differenziali del sistema (6.148) e (6.149) possono essere integrate per ottenere delle formule applicabili in pratica.

Si può integrare immediatamente la 6.148(5) per separazione di variabili per calcolare il $Ma(x)$ noto il $C_\tau(x)$.

$$\int_{Ma^2}^1 \frac{1}{Ma^2} \frac{1}{F_5(Ma)} d(Ma^2) = \int_0^{L_{max}} 4C_\tau \frac{dx}{D_i} \quad (6.150)$$

come si vede l'integrale è esteso da 0 a L_{max} per l'integrale in dx a cui, in termini di Ma , corrispondono rispettivamente il valore di ingresso ed il valore 1.

Possiamo introdurre un coefficiente di attrito medio che è dato da:

$$\bar{C}_\tau = \frac{1}{L_{max}} \int_0^{L_{max}} C_\tau dx \quad (6.151)$$

per cui la (6.150) diventa:

$$4C_\tau \frac{L_{\max}}{D_i} = G(Ma^2) \quad (6.152)$$

dove G rappresenta il risultato dell'integrale a secondo membro della (6.150). Questa relazione, per l'aria, è tabulata nelle tabelle di seguito riportate e tratte da Shapiro Vol. 1 (1953) (Tabelle 6.4, in cui \bar{C}_τ è indicato come f).

La relazione (6.152) è di notevole interesse pratico perché permette, ad esempio, di determinare quale deve essere la lunghezza L di un condotto adiabatico ma con attrito, in cui il flusso passi da un valore Ma_1 ad un valore Ma_2 , semplicemente utilizzando la seguente relazione:

$$4C_\tau \frac{L}{D_i} = \left(4C_\tau \frac{L_{\max}}{D_i} \right)_{Ma_1} - \left(4C_\tau \frac{L_{\max}}{D_i} \right)_{Ma_2} \quad (6.153)$$

in cui Ma_1 , Ma_2 e \bar{C}_τ sono noti e l'unico valore incognito resta L .

Analogamente alla relazione (6.150) possiamo integrare le altre equazioni del sistema (6.148-6.149) sempre per separazione di variabili ed ottenere anche per le altre quantità delle espressioni esplicite in termini di Ma . Da notare che l'integrale è ancora una volta esteso fino ad L_{\max} , per cui le relazioni ottenute sono tutte riferite alle grandezza critiche (anche queste relazioni sono tabulate per il caso dell'aria nelle tabelle B4). A titolo informativo tali relazioni vengono riportate nel seguito:

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{Ma} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2 \left(1 + Ma^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right)}}$$

$$\frac{u}{u^*} = \frac{\rho}{\rho^*} = Ma \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2 \left(1 + Ma^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right)}}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{c}{c^*} = \frac{\gamma + 1}{2 \left(1 + Ma^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right)}$$

$$\frac{P_t}{P_t^*} = \frac{1}{Ma} \sqrt{\left[\frac{2 \left(1 + Ma^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right)}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma}}}$$

$$\frac{S - S^*}{c_p} = \log \left\{ Ma^2 \sqrt{\left[\frac{\gamma + 1}{2 Ma^2 \left(1 + Ma^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right)} \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma}}} \right\}$$

In generale, se occorre trovare la variazione di una proprietà, ad esempio la pressione P , tra due sezioni corrispondenti a Ma_1 e Ma_2 , si deve usare la relazione:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left(\frac{P}{P^*} \right)_{Ma=Ma_2}}{\left(\frac{P}{P^*} \right)_{Ma=Ma_1}} \quad (6.154)$$

cioè occorre sempre fare riferimento alle grandezze critiche che si otterrebbero in un condotto di lunghezza L_{max} .

TABELLA 6.4
FLUSSI COMPRESSIBILI, ADIABATICI, CON ATTRITO, $\gamma=1.4$:
LINEA DI FANNO ($\theta = t = \text{totale}$)

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	V/V^* and ρ^*/ρ	F/F^*	$4fL_{\max}/D$
0.00	1.2000	∞	∞	0.00000	∞	∞
.05	1.1994	21.903	11.5914	.05476	9.1584	280.02
.10	1.1976	10.9435	5.8218	.10943	4.6236	66.922
.15	1.1946	7.2866	3.9103	.16395	3.1317	27.932
.20	1.1905	5.4555	2.9635	.21822	2.4004	14.533
.25	1.1852	4.3546	2.4027	.27217	1.9732	8.4834
.30	1.1788	3.6190	2.0351	.32572	1.6979	5.2992
.35	1.1713	3.0922	1.7780	.37880	1.5094	3.4525
.40	1.1628	2.6958	1.5901	.43133	1.3749	2.3085
.45	1.1533	2.3865	1.4486	.48326	1.2763	1.5664
.50	1.1429	2.1381	1.3399	.53453	1.2027	1.06908
.55	1.1315	1.9341	1.2549	.58506	1.1472	.72805
.60	1.1194	1.7634	1.1882	.63481	1.10504	.49081
.65	1.10650	1.6183	1.1356	.68374	1.07314	.32460
.70	1.09290	1.4934	1.09436	.73179	1.04915	.20814
.75	1.07856	1.3848	1.06242	.77893	1.03137	.12728
.80	1.06383	1.2892	1.03823	.82514	1.01853	.07229
.85	1.04849	1.2047	1.02067	.87037	1.00966	.03632
.90	1.03270	1.12913	1.00887	.91459	1.00399	.014513
.95	1.01652	1.06129	1.00215	.95782	1.00093	.003280
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0
1.05	.98320	.94435	1.00203	1.04115	1.00082	.002712
1.10	.96618	.89359	1.00793	1.08124	1.00305	.009933
1.15	.94899	.84710	1.01746	1.1203	1.00646	.02053
1.20	.93168	.80436	1.03044	1.1583	1.01082	.03364
1.25	.91429	.76495	1.04676	1.1952	1.01594	.04858
1.30	.89686	.72848	1.06630	1.2311	1.02169	.06483
1.35	.87944	.69466	1.08904	1.2660	1.02794	.08199
1.40	.86207	.66320	1.1149	1.2999	1.03458	.09974
1.45	.84477	.63387	1.1440	1.3327	1.04153	.11782
1.50	.82759	.60648	1.1762	1.3646	1.04870	.13605
1.55	.81054	.58084	1.2116	1.3955	1.05604	.15427
1.60	.79365	.55679	1.2502	1.4254	1.06348	.17236
1.65	.77695	.53421	1.2922	1.4544	1.07098	.19022
1.70	.76046	.51297	1.3376	1.4825	1.07851	.20780
1.75	.74419	.49295	1.3865	1.5097	1.08603	.22504
1.80	.72816	.47407	1.4390	1.5360	1.09352	.24189
1.85	.71238	.45623	1.4952	1.5614	1.1009	.25832
1.90	.69686	.43936	1.5552	1.5861	1.1083	.27433
1.95	.68162	.42339	1.6193	1.6099	1.1155	.28989
2.00	.66667	.40825	1.6875	1.6330	1.1227	.30499
2.05	.65200	.39389	1.7600	1.6553	1.1297	.31965
2.10	.63762	.38024	1.8369	1.6769	1.1366	.33385
2.15	.62354	.36728	1.9185	1.6977	1.1434	.34760
2.20	.60976	.35494	2.0050	1.7179	1.1500	.36091

(continua)

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	V/V^* and ρ^*/ρ	F/F^*	$4fL_{\max}/D$
2.25	.59627	.34319	2.0964	1.7374	1.1565	.37378
2.30	.58309	.33200	2.1931	1.7563	1.1629	.38623
2.35	.57021	.32133	2.2953	1.7745	1.1690	.39826
2.40	.55762	.31114	2.4031	1.7922	1.1751	.40989
2.45	.54533	.30141	2.5168	1.8092	1.1810	.42113
2.50	.53333	.29212	2.6367	1.8257	1.1867	.43197
2.55	.52163	.28323	2.7630	1.8417	1.1923	.44247
2.60	.51020	.27473	2.8960	1.8571	1.1978	.45259
2.65	.49906	.26658	3.0359	1.8721	1.2031	.46237
2.70	.48820	.25878	3.1830	1.8865	1.2083	.47182
2.75	.47761	.25131	3.3376	1.9005	1.2133	.48095
2.80	.46729	.24414	3.5001	1.9140	1.2182	.48976
2.85	.45723	.23726	3.6707	1.9271	1.2230	.49828
2.90	.44743	.23066	3.8498	1.9398	1.2277	.50651
2.95	.43788	.22431	4.0376	1.9521	1.2322	.51447
3.00	.42857	.21822	4.2346	1.9640	1.2366	.52216
3.50	.34783	.16850	6.7896	2.0642	1.2743	.58643
4.00	.28571	.13363	10.719	2.1381	1.3029	.63306
4.50	.23762	.10833	16.562	2.1936	1.3247	.66764
5.00	.20000	.08944	25.000	2.2361	1.3416	.69381
6.00	.14634	.06376	53.180	2.2953	1.3655	.72987
7.00	.11111	.04762	104.14	2.3333	1.3810	.75281
8.00	.08696	.03686	190.11	2.3591	1.3915	.76820
9.00	.06977	.02935	327.19	2.3772	1.3989	.77893
10.00	.05714	.02390	535.94	2.3905	1.4044	.78683
∞	0	0	∞	2.4495	1.4289	.82153

6.7.2 Flussi di Rayleigh

Come detto, consideriamo un condotto a sezione costante senza attrito e non adiabatico. Anche in questo caso, utilizzeremo due approcci, uno globale per la determinazione della curva nel piano T,S , ed uno locale per determinare l'andamento delle variabili termodinamiche nel condotto.

6.7.2.1 Approccio globale

Nel caso dei flussi alla Rayleigh, lo scambio di calore influenza l'equazione dell'energia mentre l'equazione della conservazione della quantità di moto resta quella già vista per i flussi unidimensionali non isentropici (eq. 6.54), ovvero:

$$P + \rho u^2 = \text{cost} \Rightarrow P + \frac{(\rho u)^2}{\rho} = \text{cost} \quad (6.54)$$

che, combinata con l'equazione di stato, dà:

$$P + \frac{RT(\rho u)^2}{P} = \text{cost} \quad (6.155)$$

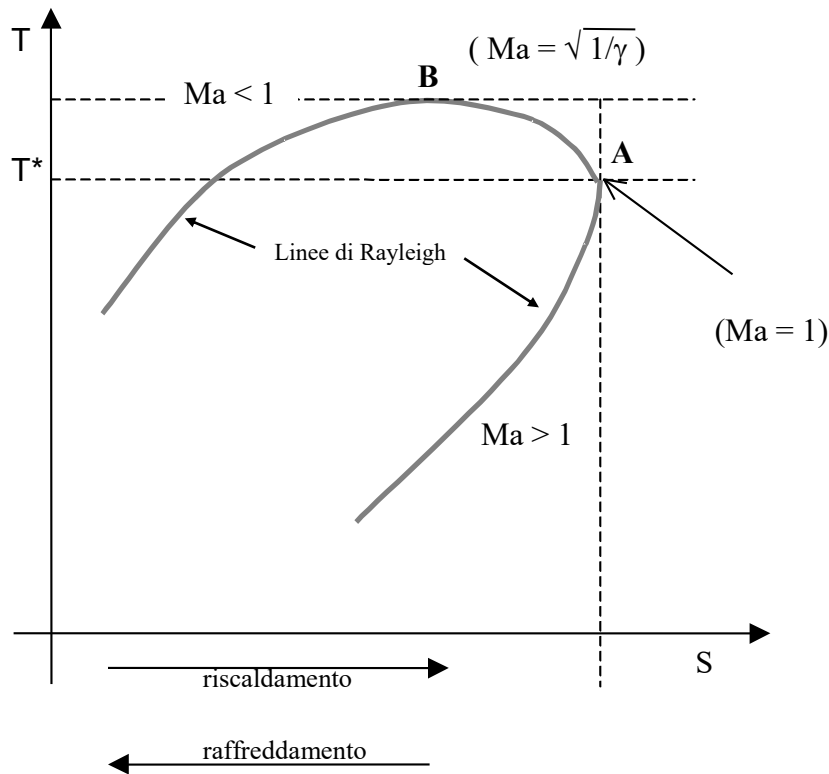
in cui il termine ρu è costante per l'equazione di conservazione della massa. A questa relazione aggiungiamo la seguente:

$$S - S_1 = c_p \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{P}{P_1}\right) \quad (6.156)$$

Eliminando la pressione tra le (6.155) e (6.156) si ottiene una relazione del tipo:

$$F(S, T) = 0$$

che nel piano T,S (fissate le condizioni iniziali, il tipo di flusso e la portata) rappresenta un' unica linea, cosiddetta linea di Rayleigh:



Come nel caso precedente si può dimostrare che in A si ha $Ma=1$, mentre in B si ha:

$$Ma = \sqrt{\frac{1}{\gamma}} < 1$$

Infatti

$$TdS = dh - vdp = c_p dT + u du \quad \text{che può essere ridotta a} \quad \frac{dS}{dT} = \frac{c_p}{T} + \frac{u}{T} \frac{du}{dT}$$

$$\frac{dS}{dT} = \frac{c_p}{T} + \frac{u}{T} \frac{1}{[(T/u - u/R)]} = \frac{c_p \mathfrak{R} + u}{T \cdot \mathfrak{R}} \quad \text{dove} \quad (T/u - u/R) = \mathfrak{R} ;$$

ma il Mach corrispondente a S_{\max} sarà dato da:

$$\frac{dS}{dT} = 0 \Rightarrow u_A = \sqrt{\gamma RT_A = c_A} \Rightarrow M_A = 1$$

Inoltre il Mach corrispondente a T_{\max} sarà:

$$\frac{dT}{dS} = 0 \Rightarrow T \cdot \mathfrak{R} = 0 \Rightarrow M_B = \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$$

Nel ramo superiore si ha quindi $Ma < 1$ ($T > T^*$) mentre nel ramo inferiore $Ma > 1$ ($T < T^*$). Si noti che in questo caso non si ha un verso preferenziale di S nel senso che se il flusso viene scaldato si ha un aumento di entropia mentre se il flusso viene raffreddato si ha una diminuzione di entropia.

6.7.2.2 Approccio locale

Per tenere conto degli scambi di calore, scriviamo l'equazione di bilancio dell'energia nel volume semi-infinitesimo, come nel caso dei flussi alla Fanno:

$$dh + u du = \delta Q$$

essendo h l'entalpia e δQ la quantità di calore scambiata per unità di massa attraverso la superficie laterale del volumetto di controllo semi-infinitesimo.

Tenendo conto che $dh = c_p dT$ e che $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$ si ottiene:

$$\frac{du}{u} = \frac{\delta Q}{c_p T} \left[\frac{u}{T} \frac{dT}{du} + \frac{u^2(\gamma - 1)}{\gamma R T} \right]^{-1} \quad (6.157)$$

Come per il caso precedente dei flussi alla Fanno, combinando la (6.157) con l'equazione di stato, tenendo conto della continuità, dell'equazione di conservazione della quantità di moto e della definizione di numero di Ma , si ottiene:

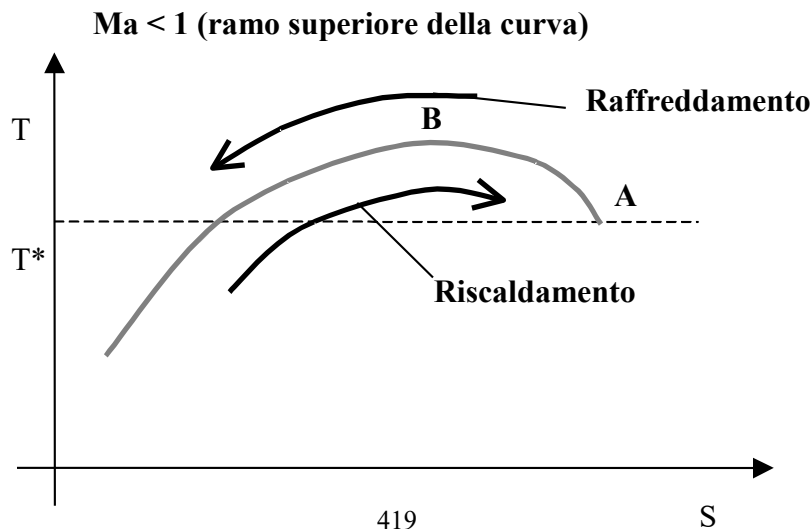
$$\boxed{\frac{du}{u} = \frac{\delta Q}{c_p T} \left(\frac{1}{1 - Ma^2} \right)} \quad (6.158)$$

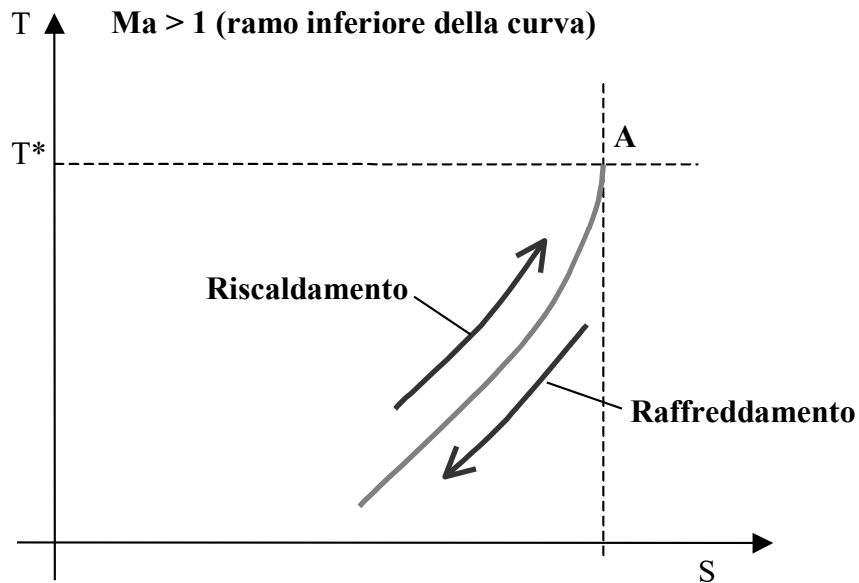
Questa relazione indica che:

- Per $Ma < 1$ il riscaldamento del fluido ($\delta Q > 0$) fa aumentare la velocità ($du > 0$), mentre il raffreddamento ($\delta Q < 0$) fa diminuire la velocità ($du < 0$)
- Per $Ma > 1$ il riscaldamento del fluido ($\delta Q > 0$) fa diminuire la velocità ($du < 0$), mentre il raffreddamento ($\delta Q < 0$) fa aumentare la velocità ($du > 0$).

In ogni caso bisogna tenere conto che se $\delta Q > 0$ si ha $\Delta S > 0$ mentre se $\delta Q < 0$ si ha $\Delta S < 0$.

Quindi :



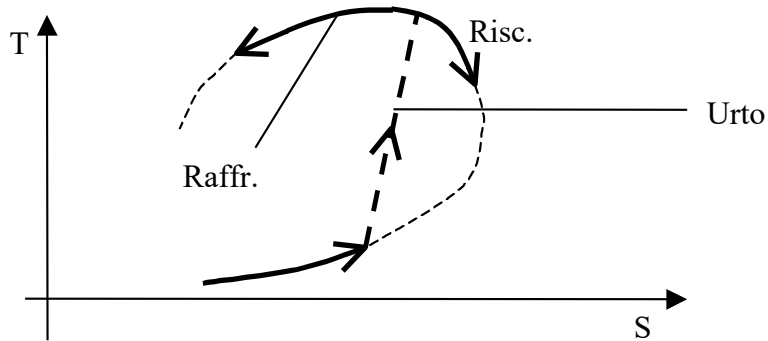


Quindi il riscaldamento (se $Ma > 1$) o il raffreddamento (se $Ma < 1$) fanno aumentare il Ma e viceversa:

	Riscaldamento	Raffreddamento
$Ma < 1$	Accelerazione	Decelerazione
$Ma > 1$	Decelerazione	Accelerazione

Poiché il riscaldamento accelera il flusso da $Ma < 1$, la condizione di chocking può essere raggiunta o meno, a seconda di quanto riscaldiamo il flusso.

E' interessante notare che nel tratto di curva tra **A** e **B** il riscaldamento provoca una diminuzione di temperatura mentre il raffreddamento provoca un aumento di temperatura! (questo succede perché per $M < 1$, tenendo conto della definizione di temperatura totale, l'energia termica diminuisce (aumenta) a vantaggio (spese) dell'energia cinetica). Si noti infine che un passaggio da $Ma > 1$ a $Ma < 1$ può avvenire in presenza di urti che possono verificarsi se riscaldiamo eccessivamente il flusso in moto supersonico:



Come nel caso dei flussi alla Fanno, possiamo integrare le relazioni ricavate per il volumetto semi-infinitesimo, ottenendo le seguenti equazioni (sempre riferite alle condizioni critiche):

$$\frac{P}{P^*} = \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma Ma^2}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{a}{a^*} = \left[\frac{(\gamma + 1) Ma^2}{1 + \gamma Ma^2} \right]^2$$

$$\frac{u}{u^*} = \frac{\rho}{\rho^*} = Ma \left[\frac{(\gamma + 1) Ma}{1 + \gamma Ma^2} \right]$$

$$\frac{P_t}{P_t^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma Ma^2} \left[\left(\frac{2}{\gamma + 1} \right) \left(1 + Ma^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{T_t}{T_t^*} = \frac{2(\gamma + 1) Ma^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)}{1 + \gamma Ma^2}$$

Si noti che questo l'unico caso studiato fin'ora in cui la temperatura totale varia!

Queste relazioni, per l'aria, sono anch'esse tabulate nelle tabelle di seguito riportate e tratte da Shapiro Vol. 1 (1953) (Tabelle 6.5).

L'andamento delle funzioni sopra riportate è mostrato nella figura seguente tratta da Munson et al. (1998).

Possiamo concludere dicendo che l'effetto del riscaldamento è simile a quello dell'attrito. Entrambi accelerano un flusso subsonico e decelerano un flusso supersonico. In particolare, dalle relazioni $P/P_t = F(Ma)$, entrambi fanno decrescere la pressione di ristagno P_t . Questo punto è molto importante perché le perdite di pressione totale sono ovviamente dannose in termini di efficienza fluidodinamica. In sede progettuale, quindi, se per un fluido in un condotto è presente un eventuale riscaldamento (sia esso necessario che non voluto, si pensi ad esempio ad un reattore nucleare) devono essere tenute in conto le perdite di carico aggiuntive legate agli effetti della non-adiabaticità, per la valutazione delle perdite totali e dell'efficienza.

TABELLA 6.5
FLUSSI COMPRESSIBILI, NON ADIABATICI, SENZA ATTRITO, $\gamma=1.4$:
LINEA DI RAYLEIGH ($\theta = t = \text{totale}$)

M	T_0/T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	$\frac{\rho^*}{\rho}$ and V/V^*
0.00	0.00000	0.00000	2.4000	1.2679	0.00000
.05	.01192	.01430	2.3916	1.2657	.00598
.10	.04678	.05602	2.3669	1.2591	.02367
.15	.10196	.12181	2.3267	1.2486	.05235
.20	.17355	.20661	2.2727	1.2346	.09091
.25	.25684	.30440	2.2069	1.2177	.13793
.30	.34686	.40887	2.1314	1.1985	.19183
.35	.43894	.51413	2.0487	1.1779	.25096
.40	.52903	.61515	1.9608	1.1566	.31372
.45	.61393	.70803	1.8699	1.1351	.37865
.50	.69136	.79012	1.7778	1.1140	.44445
.55	.75991	.85987	1.6860	1.09397	.51001
.60	.81892	.91670	1.5957	1.07525	.57447
.65	.86833	.96081	1.5080	1.05820	.63713
.70	.90850	.99289	1.4235	1.04310	.69751
.75	.94009	1.01403	1.3427	1.03010	.75525
.80	.96394	1.02548	1.2658	1.01934	.81012
.85	.98097	1.02854	1.1931	1.01091	.86204
.90	.99207	1.02451	1.1246	1.00485	.91097
.95	.99814	1.01463	1.06030	1.00121	.95692
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.05	.99838	.98161	.94358	1.00121	1.04030
1.10	.99392	.96031	.89086	1.00486	1.07795
1.15	.98721	.93685	.84166	1.01092	1.1131
1.20	.97872	.91185	.79576	1.01941	1.1459
1.25	.96886	.88581	.75294	1.03032	1.1764
1.30	.95798	.85917	.71301	1.04365	1.2050
1.35	.94636	.83227	.67577	1.05943	1.2316
1.40	.93425	.80540	.64102	1.07765	1.2564
1.45	.92184	.77875	.60860	1.0983	1.2796
1.50	.90928	.75250	.57831	1.1215	1.3012
1.55	.89669	.72680	.55002	1.1473	1.3214
1.60	.88419	.70173	.52356	1.1756	1.3403
1.65	.87184	.67738	.49881	1.2066	1.3580
1.70	.85970	.65377	.47563	1.2402	1.3745
1.75	.84785	.63096	.45390	1.2767	1.3901
1.80	.83628	.60894	.43353	1.3159	1.4046
1.85	.82504	.58773	.41440	1.3581	1.4183
1.90	.81414	.56734	.39643	1.4033	1.4311
1.95	.80359	.54774	.37954	1.4516	1.4432
2.00	.79339	.52893	.36364	1.5031	1.4545
2.05	.78355	.51087	.34866	1.5579	1.4652
2.10	.77406	.49356	.33454	1.6161	1.4753
2.15	.76493	.47696	.32122	1.6780	1.4849
2.20	.75614	.46106	.30864	1.7434	1.4939

(continua)

M	T_0/T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	$\frac{\rho^*/\rho}{\text{and } V/V^*}$
2.25	.74767	.44582	.29675	1.8128	1.5024
2.30	.73954	.43122	.28551	1.8860	1.5104
2.35	.73173	.41724	.27487	1.9634	1.5180
2.40	.72421	.40383	.26478	2.0450	1.5252
2.45	.71700	.39100	.25523	2.1311	1.5320
2.50	.71005	.37870	.24616	2.2218	1.5385
2.55	.70340	.36691	.23754	2.3173	1.5446
2.60	.69699	.35561	.22936	2.4177	1.5505
2.65	.69084	.34478	.22158	2.5233	1.5560
2.70	.68494	.33439	.21417	2.6342	1.5613
2.75	.67926	.32442	.20712	2.7503	1.5663
2.80	.67380	.31486	.20040	2.8731	1.5711
2.85	.66855	.30568	.19399	3.0013	1.5757
2.90	.66350	.29687	.18788	3.1358	1.5801
2.95	.65865	.28841	.18205	3.2763	1.5843
3.00	.65398	.28028	.17647	3.4244	1.5882
3.50	.61580	.21419	.13223	5.3280	1.6198
4.00	.58909	.16831	.10256	8.2268	1.6410
4.50	.56983	.13540	.08177	12.502	1.6559
5.00	.55555	.11111	.06667	18.634	1.6667
6.00	.53633	.07849	.04669	38.946	1.6809
7.00	.52437	.05826	.03448	75.414	1.6896
8.00	.51646	.04491	.02649	136.62	1.6954
9.00	.51098	.03565	.02098	233.88	1.6993
10.00	.50702	.02897	.01702	381.62	1.7021
∞	.48980	0	0	∞	1.7143

6.8 Esercizi relativi al capitolo 6

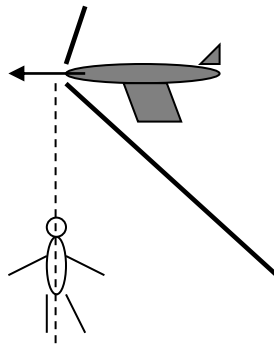
6.8.1 Flussi compressibili isentropici

Es. 6.1.1 Si consideri un flusso di aria stazionario in un tubo circolare dritto di diametro $D=0.1m$. La temperatura e la pressione (assoluta), uniformemente distribuite in ogni sezione, sono $T_1=300^{\circ}K$ e $P_1=6.895KPa$ nella sezione 1 e $T_2=252^{\circ}K$ e $P_2=1.269KPa$ nella sezione 2. Assumendo l'aria come gas perfetto, calcolare:

- La variazione di energia interna tra le sezioni 1 e 2
- La variazione di entalpia
- La variazione di densità
- La variazione di entropia



Es. 6.1.2 Un aereo vola orizzontalmente ed in moto uniforme ad una quota $z=1000m$. La velocità dell'aereo corrisponde a $Ma=1.5$ e la temperatura ambiente è di $T=20^{\circ}C$. Un osservatore a terra udrà il passaggio dell'aereo con un certo ritardo τ rispetto al momento in cui l'aereo passa sulla sua verticale. Determinare τ trascurando le variazioni di T con la quota.

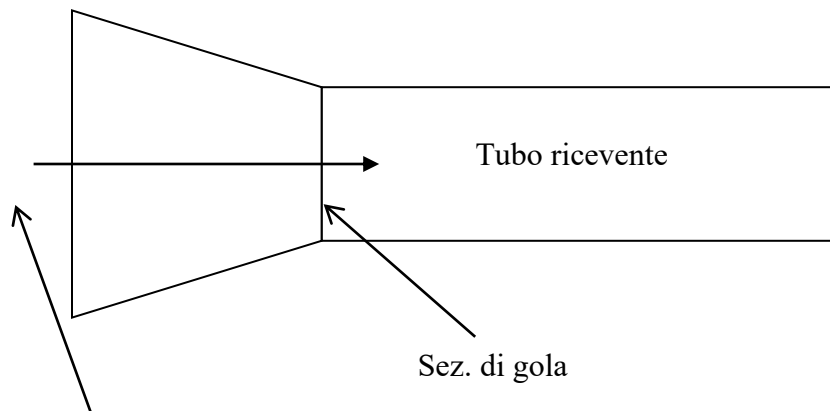


Es. 6.1.3 Si consideri un punto in un flusso di aria, dove il valore di Ma locale, la pressione statica P e la temperatura statica T sono rispettivamente 3.5, 0.3Atm e 180°K . Determinare, attraverso l'uso delle tabelle relative alle relazioni isentropiche, i valori locali di:
 a^* , T^* , Ma^* , P_t , T_t .

Es. 6.1.4 Si consideri un flusso d'aria stazionario che passa attraverso un condotto convergente e sfocia in un tubo cilindrico ricevente. La sezione di gola del convergente è di 10^{-4} m^2 . Determinare la portata in massa attraverso il convergente se la pressione del tubo ricevente è:

- 1) 80 KPa
- 2) 40 KPa

Risolvere il problema senza utilizzare le tabelle.



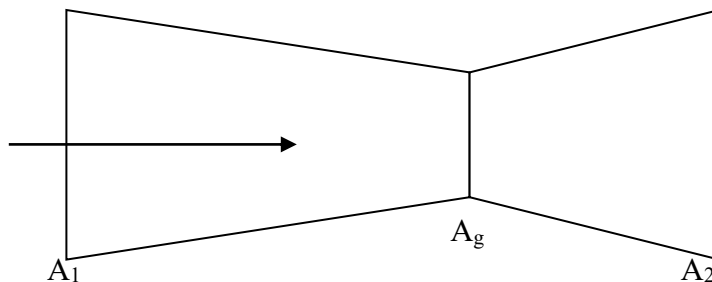
Condiz. di ristagno
atmosfera standard
 $T_0 = 288\text{K}$
 $P_0 = 1\text{Atm}$
 $\rho_0 = 1.22\text{ Kg/m}^3$

Es. 6.1.5 Ripetere l'esercizio precedente utilizzando le tabelle per flussi isentropici compressibili.

Es. 6.1.6 Si consideri un condotto convergente-divergente con $A_1=1\text{m}^2$, $Ma_1=0.7$, $A_2=1.5\text{m}^2$.

Risolvere i seguenti quesiti:

- Determinare l'area della sezione di gola (A_g) ed il Ma_2 nel caso in cui il condotto sia in choking.
- Determinare l'area della sezione di gola (A_g) ed il Ma_2 nel caso in cui il condotto non sia in choking ($A_g > A^*$).
- Supponendo che per $M_2 > 1$ si abbia $P_2=2 \times 10^4 \text{ Pa}$, determinare la pressione totale P_0 e P_1 . Determinare il valore di P_{21} riferito alla soluzione subsonica ($M_2 < 1$) a parità di P_0 .



Es. 6.1.7 Si consideri un ugello De-Laval (convergente-divergente) che in condizioni di progetto (cioè in choking con flusso supersonico in uscita) ha le seguenti caratteristiche:

Portata in massa $m = 1 \text{ Kg/sec}$

Pressione esterna $P_e = 10^4 \text{ Pa}$

Numero di Mach in uscita $Mu = 3$

Temperatura totale $T_0 = 2000 \text{ °K}$

Considerando l'aria come un gas perfetto, determinare la sezione di uscita A_u .

Es. 6.1.8 Si consideri un ugello convergente-divergente avente sezione di gola (A_g) di 10cm^2 ed il rapporto tra sezione di uscita e sezione di gola (A_2/A_g) pari a 2. Tenendo conto che la pressione totale (P_t) e la temperatura totale (T_t) valgono rispettivamente 10^5 Pa e 1000°K , determinare:

- la pressione di progetto (in A_2),
- la portata in massa quando la pressione esterna P_e è pari a $0.96P_t$
- la portata massima.

Es. 6.1.9 Un tubo di Pitot misura il rapporto tra pressione statica e pressione di ristagno in un punto in un flusso di un fluido compressibile. Tale rapporto è pari a 0.82 e la temperatura di ristagno del fluido è 20°C. Determinare:

- la velocità del fluido se si considera come gas l'aria
- la velocità del fluido se si considera come gas l'elio ($\gamma=1.666$, $R=2077$)

Es. 6.1.10 Un flusso d'aria in condizioni di atmosfera standard, entra con velocità subsonica in un condotto convergente-divergente con sezione circolare. Chiamando x la distanza assiale dalla sezione di gola, l'area $A(x)$ varia secondo la legge:

$$A(x) = 0.1 + x^2$$

Il condotto si estende da $x = -0.5m$ fino a $x = 0.5m$. Tenendo conto che il condotto si trova in condizioni di chocking, disegnare la variazione di Ma , T/T_0 e P/P_0 lungo il condotto.

Es. 6.1.11 Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui $P/P_0=0.99$ nella posizione $x = 0.5 m$.

6.8.2 Urto normale

Es. 6.2.1 Si consideri un urto normale in aria dove le proprietà a monte siano:

$U=680\text{m/s}$, T (statica) = 288K, P (statica) = 1atm.

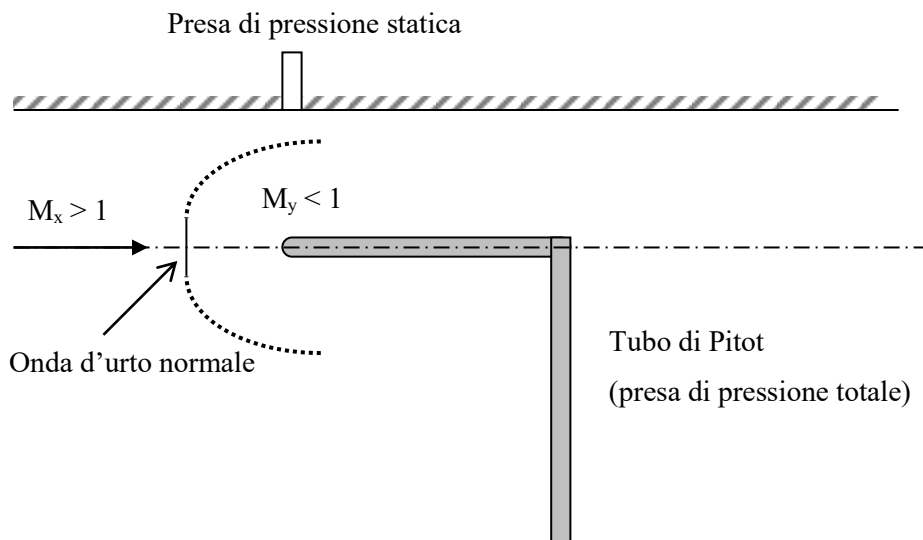
Calcolare la velocità, temperatura statica e pressione statica a valle dell'urto.

Es. 6.2.2 Una sonda di pressione totale (tubo di Pitot supersonico) è inserita in un flusso d'aria supersonica. Un'onda d'urto normale si forma appena a monte del foro d'impatto della sonda. La sonda misura una pressione totale P_{ts} mentre la temperatura di ristagno corrispondente è T_{ts} . La pressione statica a monte dell'urto, misurata attraverso un foro su una parete, è P_m . Dati

$P_{ts} = 413.7 \text{ KPa}$, $P_m = 82.7 \text{ KPa}$, $T_{ts} = 556\text{K}$

Determinare il numero di Mach (M_x) e la velocità del fluido (si noti che la relazione

$P_{ty}/P_{tx}=F(M_x)$ si chiama formula di Rayleigh per il tubo di Pitot supersonico).



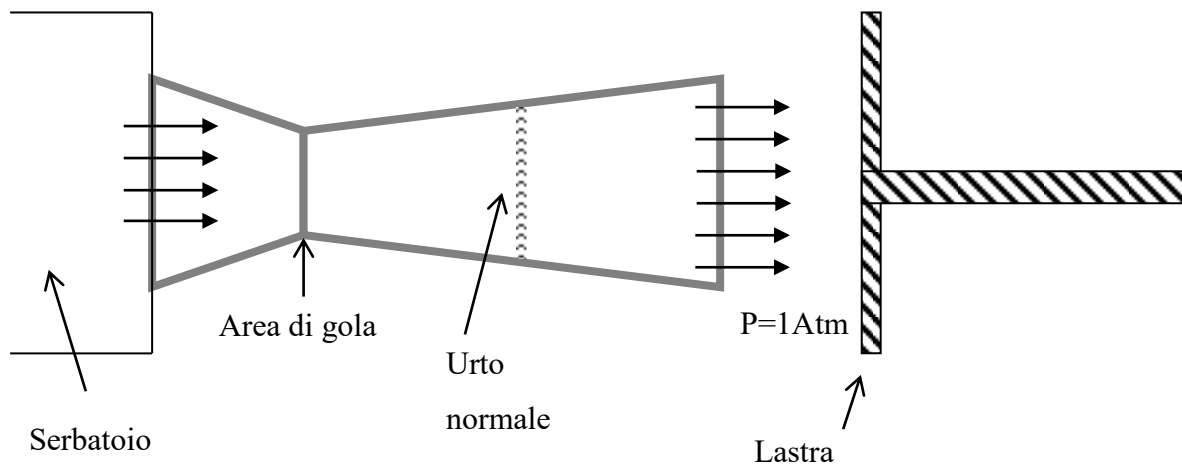
Es. 6.2.3 Si consideri un condotto convergente-divergente avente sezione circolare A che varia con la distanza x dalla sezione di gola secondo la legge:

$$A(x) = 0.1 + x^2$$

Il condotto si estende da $x = -0.5$ a $x = 0.5$ (in metri). Supponiamo che un urto si formi nella posizione $x=0.5$. Determinare il rapporto tra la pressione statica a valle dell'urto e la pressione totale a monte dell'urto (P_y/P_{tx}).

Es. 6.2.4 Ripetere l'esercizio precedente per il caso in cui l'urto si trovi nella posizione $x = 0.3\text{m}$.

Es. 6.2.5 Un ugello De Laval ha il diametro della sezione di gola di 2.5cm ed un rapporto tra area di uscita ed area di gola (A_u/A_g) pari a 6. L'ugello scarica nell'atmosfera un getto d'aria stazionario con il profilo di velocità uniforme. A monte, l'ugello è collegato ad un serbatoio a temperatura $T=20^\circ\text{C}$. Un urto normale è posizionato in una sezione A_s tale che $A_s/A_g=3$. Una lastra è montata a valle dell'uscita dell'ugello perpendicolare al getto. Calcolare la forza che agisce sulla lastra dovuta al flusso d'aria che spinge.



Es. 6.2.6 Un flusso d'aria a $Ma=3$ entra in un condotto divergente con rapporto tra area di uscite e di ingresso pari a 3. Determinare il rapporto tra le pressioni statiche di ingresso e uscita che causa un urto normale in una sezione intermedia di area pari a due volte l'area della sezione di ingresso.

TABELLA 6.1
FLUSSI COMPRESSIBILI ISENTROPICI, $\gamma=1.4$

M	M^*	$\frac{T}{T_t}$	$\frac{p}{p_t}$	$\frac{\rho}{\rho_t}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{a}{a_t}$
.00	.00000	.10000E+01	.10000E+01	.10000E+01	∞	.10000E+01
.01	.01095	.99998E+00	.99993E+00	.99995E+00	.57874E+02	.99999E+00
.02	.02191	.99992E+00	.99972E+00	.99980E+00	.28942E+02	.99996E+00
.03	.03286	.99982E+00	.99937E+00	.99955E+00	.19301E+02	.99991E+00
.04	.04381	.99968E+00	.99888E+00	.99920E+00	.14481E+02	.99984E+00
.05	.05476	.99950E+00	.99825E+00	.99875E+00	.11591E+02	.99975E+00
.06	.06570	.99928E+00	.99748E+00	.99820E+00	.96659E+01	.99964E+00
.07	.07664	.99902E+00	.99658E+00	.99755E+00	.82915E+01	.99951E+00
.08	.08758	.99872E+00	.99553E+00	.99681E+00	.72616E+01	.99936E+00
.09	.09851	.99838E+00	.99435E+00	.99596E+00	.64613E+01	.99919E+00
.10	.10944	.99800E+00	.99303E+00	.99502E+00	.58218E+01	.99900E+00
.11	.12035	.99759E+00	.99158E+00	.99398E+00	.52992E+01	.99879E+00
.12	.13126	.99713E+00	.98998E+00	.99284E+00	.48643E+01	.99856E+00
.13	.14217	.99663E+00	.98826E+00	.99160E+00	.44969E+01	.99831E+00
.14	.15306	.99610E+00	.98640E+00	.99027E+00	.41824E+01	.99805E+00
.15	.16395	.99552E+00	.98441E+00	.98884E+00	.39103E+01	.99776E+00
.16	.17482	.99491E+00	.98228E+00	.98731E+00	.36727E+01	.99745E+00
.17	.18569	.99425E+00	.98003E+00	.98569E+00	.34635E+01	.99712E+00
.18	.19654	.99356E+00	.97765E+00	.98398E+00	.32779E+01	.99678E+00
.19	.20739	.99283E+00	.97514E+00	.98218E+00	.31123E+01	.99641E+00
.20	.21822	.99206E+00	.97250E+00	.98028E+00	.29635E+01	.99602E+00
.21	.22904	.99126E+00	.96973E+00	.97829E+00	.28293E+01	.99562E+00
.22	.23984	.99041E+00	.96685E+00	.97620E+00	.27076E+01	.99519E+00
.23	.25063	.98953E+00	.96383E+00	.97403E+00	.25968E+01	.99475E+00
.24	.26141	.98861E+00	.96070E+00	.97177E+00	.24956E+01	.99429E+00
.25	.27217	.98765E+00	.95745E+00	.96942E+00	.24027E+01	.99381E+00
.26	.28291	.98666E+00	.95408E+00	.96698E+00	.23173E+01	.99331E+00
.27	.29364	.98563E+00	.95060E+00	.96446E+00	.22385E+01	.99279E+00
.28	.30435	.98456E+00	.94700E+00	.96185E+00	.21656E+01	.99225E+00
.29	.31504	.98346E+00	.94329E+00	.95916E+00	.20979E+01	.99169E+00
.30	.32572	.98232E+00	.93947E+00	.95638E+00	.20351E+01	.99112E+00
.31	.33637	.98114E+00	.93554E+00	.95352E+00	.19765E+01	.99053E+00
.32	.34701	.97993E+00	.93150E+00	.95058E+00	.19219E+01	.98991E+00
.33	.35762	.97868E+00	.92736E+00	.94756E+00	.18707E+01	.98928E+00
.34	.36822	.97740E+00	.92312E+00	.94446E+00	.18229E+01	.98864E+00
.35	.37879	.97609E+00	.91877E+00	.94128E+00	.17780E+01	.98797E+00
.36	.38935	.97473E+00	.91433E+00	.93803E+00	.17358E+01	.98729E+00
.37	.39988	.97335E+00	.90979E+00	.93470E+00	.16961E+01	.98658E+00
.38	.41039	.97193E+00	.90516E+00	.93130E+00	.16587E+01	.98587E+00
.39	.42087	.97048E+00	.90043E+00	.92782E+00	.16234E+01	.98513E+00
.40	.43133	.96899E+00	.89561E+00	.92427E+00	.15901E+01	.98437E+00
.41	.44177	.96747E+00	.89071E+00	.92066E+00	.15587E+01	.98360E+00
.42	.45218	.96592E+00	.88572E+00	.91697E+00	.15289E+01	.98281E+00
.43	.46257	.96434E+00	.88065E+00	.91322E+00	.15007E+01	.98201E+00
.44	.47293	.96272E+00	.87550E+00	.90940E+00	.14740E+01	.98118E+00
.45	.48326	.96108E+00	.87027E+00	.90551E+00	.14487E+01	.98035E+00
.46	.49357	.95940E+00	.86496E+00	.90157E+00	.14246E+01	.97949E+00
.47	.50385	.95769E+00	.85958E+00	.89756E+00	.14018E+01	.97862E+00
.48	.51410	.95595E+00	.85413E+00	.89349E+00	.13801E+01	.97773E+00
.49	.52433	.95418E+00	.84861E+00	.88936E+00	.13595E+01	.97682E+00

(continua)

M	M^*	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{p}{p_i}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{a}{a_i}$
.50	.53452	.95238E+00	.84302E+00	.88517E+00	.13398E+01	.97590E+00
.51	.54469	.95055E+00	.83737E+00	.88093E+00	.13212E+01	.97496E+00
.52	.55483	.94869E+00	.83165E+00	.87663E+00	.13034E+01	.97401E+00
.53	.56493	.94681E+00	.82588E+00	.87228E+00	.12865E+01	.97304E+00
.54	.57501	.94489E+00	.82005E+00	.86788E+00	.12703E+01	.97206E+00
.55	.58506	.94295E+00	.81417E+00	.86342E+00	.12549E+01	.97106E+00
.56	.59507	.94098E+00	.80823E+00	.85892E+00	.12403E+01	.97004E+00
.57	.60505	.93898E+00	.80224E+00	.85437E+00	.12263E+01	.96901E+00
.58	.61501	.93696E+00	.79621E+00	.84978E+00	.12130E+01	.96797E+00
.59	.62492	.93491E+00	.79013E+00	.84514E+00	.12003E+01	.96691E+00
.60	.63481	.93284E+00	.78400E+00	.84045E+00	.11882E+01	.96583E+00
.61	.64466	.93073E+00	.77784E+00	.83573E+00	.11767E+01	.96475E+00
.62	.65448	.92861E+00	.77164E+00	.83096E+00	.11656E+01	.96364E+00
.63	.66427	.92646E+00	.76540E+00	.82616E+00	.11552E+01	.96253E+00
.64	.67402	.92428E+00	.75913E+00	.82132E+00	.11451E+01	.96140E+00
.65	.68374	.92208E+00	.75283E+00	.81644E+00	.11356E+01	.96025E+00
.66	.69342	.91986E+00	.74650E+00	.81153E+00	.11265E+01	.95909E+00
.67	.70307	.91762E+00	.74014E+00	.80659E+00	.11179E+01	.95792E+00
.68	.71268	.91535E+00	.73376E+00	.80162E+00	.11097E+01	.95674E+00
.69	.72225	.91306E+00	.72735E+00	.79661E+00	.11018E+01	.95554E+00
.70	.73179	.91075E+00	.72093E+00	.79158E+00	.10944E+01	.95433E+00
.71	.74129	.90841E+00	.71448E+00	.78652E+00	.10873E+01	.95311E+00
.72	.75076	.90606E+00	.70803E+00	.78143E+00	.10806E+01	.95187E+00
.73	.76019	.90369E+00	.70155E+00	.77632E+00	.10742E+01	.95062E+00
.74	.76958	.90129E+00	.69507E+00	.77119E+00	.10681E+01	.94936E+00
.75	.77894	.89888E+00	.68857E+00	.76604E+00	.10624E+01	.94809E+00
.76	.78825	.89644E+00	.68207E+00	.76086E+00	.10570E+01	.94681E+00
.77	.79753	.89399E+00	.67556E+00	.75567E+00	.10519E+01	.94551E+00
.78	.80677	.89152E+00	.66905E+00	.75046E+00	.10471E+01	.94420E+00
.79	.81597	.88903E+00	.66254E+00	.74523E+00	.10425E+01	.94288E+00
.80	.82514	.88652E+00	.65602E+00	.73999E+00	.10382E+01	.94155E+00
.81	.83426	.88400E+00	.64951E+00	.73474E+00	.10342E+01	.94021E+00
.82	.84335	.88146E+00	.64300E+00	.72947E+00	.10305E+01	.93886E+00
.83	.85239	.87890E+00	.63650E+00	.72419E+00	.10270E+01	.93750E+00
.84	.86140	.87633E+00	.63000E+00	.71891E+00	.10237E+01	.93613E+00
.85	.87037	.87374E+00	.62351E+00	.71361E+00	.10207E+01	.93474E+00
.86	.87929	.87114E+00	.61703E+00	.70831E+00	.10179E+01	.93335E+00
.87	.88818	.86852E+00	.61057E+00	.70300E+00	.10153E+01	.93195E+00
.88	.89703	.86589E+00	.60412E+00	.69768E+00	.10129E+01	.93053E+00
.89	.90583	.86324E+00	.59768E+00	.69236E+00	.10108E+01	.92911E+00
.90	.91460	.86059E+00	.59126E+00	.68704E+00	.10089E+01	.92768E+00
.91	.92332	.85791E+00	.58486E+00	.68172E+00	.10071E+01	.92624E+00
.92	.93201	.85523E+00	.57848E+00	.67640E+00	.10056E+01	.92479E+00
.93	.94065	.85253E+00	.57211E+00	.67108E+00	.10043E+01	.92333E+00
.94	.94925	.84982E+00	.56578E+00	.66576E+00	.10031E+01	.92186E+00
.95	.95781	.84710E+00	.55946E+00	.66044E+00	.10021E+01	.92038E+00
.96	.96633	.84437E+00	.55317E+00	.65513E+00	.10014E+01	.91889E+00
.97	.97481	.84162E+00	.54691E+00	.64982E+00	.10008E+01	.91740E+00
.98	.98325	.83887E+00	.54067E+00	.64452E+00	.10003E+01	.91590E+00
.99	.99165	.83611E+00	.53446E+00	.63923E+00	.10001E+01	.91439E+00

(continua)

M	M^*	$\frac{T}{T_t}$	$\frac{p}{p_t}$	$\frac{\rho}{\rho_t}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{a}{a_t}$
1.00	1.00000	.83333E+00	.52828E+00	.63394E+00	.10000E+01	.91287E+00
1.01	1.00831	.83055E+00	.52213E+00	.62866E+00	.10001E+01	.91135E+00
1.02	1.01658	.82776E+00	.51602E+00	.62339E+00	.10003E+01	.90981E+00
1.03	1.02481	.82496E+00	.50994E+00	.61813E+00	.10007E+01	.90827E+00
1.04	1.03300	.82215E+00	.50389E+00	.61289E+00	.10013E+01	.90673E+00
1.05	1.04114	.81934E+00	.49787E+00	.60765E+00	.10020E+01	.90517E+00
1.06	1.04925	.81651E+00	.49189E+00	.60243E+00	.10029E+01	.90361E+00
1.07	1.05731	.81368E+00	.48595E+00	.59723E+00	.10039E+01	.90204E+00
1.08	1.06533	.81085E+00	.48005E+00	.59203E+00	.10051E+01	.90047E+00
1.09	1.07331	.80800E+00	.47418E+00	.58686E+00	.10064E+01	.89889E+00
1.10	1.08124	.80515E+00	.46835E+00	.58170E+00	.10079E+01	.89730E+00
1.11	1.08913	.80230E+00	.46257E+00	.57655E+00	.10095E+01	.89571E+00
1.12	1.09698	.79944E+00	.45682E+00	.57143E+00	.10113E+01	.89411E+00
1.13	1.10479	.79657E+00	.45111E+00	.56632E+00	.10132E+01	.89251E+00
1.14	1.11256	.79370E+00	.44545E+00	.56123E+00	.10153E+01	.89090E+00
1.15	1.12029	.79083E+00	.43983E+00	.55616E+00	.10175E+01	.88928E+00
1.16	1.12797	.78795E+00	.43425E+00	.55112E+00	.10198E+01	.88766E+00
1.17	1.13561	.78507E+00	.42872E+00	.54609E+00	.10222E+01	.88604E+00
1.18	1.14321	.78218E+00	.42323E+00	.54108E+00	.10248E+01	.88441E+00
1.19	1.15077	.77929E+00	.41778E+00	.53610E+00	.10276E+01	.88277E+00
1.20	1.15828	.77640E+00	.41238E+00	.53114E+00	.10304E+01	.88113E+00
1.21	1.16575	.77350E+00	.40702E+00	.52621E+00	.10334E+01	.87949E+00
1.22	1.17318	.77061E+00	.40171E+00	.52129E+00	.10366E+01	.87784E+00
1.23	1.18057	.76771E+00	.39645E+00	.51640E+00	.10398E+01	.87619E+00
1.24	1.18792	.76481E+00	.39123E+00	.51154E+00	.10432E+01	.87453E+00
1.25	1.19523	.76191E+00	.38606E+00	.50670E+00	.10468E+01	.87287E+00
1.26	1.20249	.75900E+00	.38093E+00	.50189E+00	.10504E+01	.87121E+00
1.27	1.20972	.75610E+00	.37586E+00	.49710E+00	.10542E+01	.86954E+00
1.28	1.21690	.75319E+00	.37083E+00	.49234E+00	.10581E+01	.86787E+00
1.29	1.22404	.75029E+00	.36585E+00	.48761E+00	.10621E+01	.86619E+00
1.30	1.23114	.74738E+00	.36091E+00	.48290E+00	.10663E+01	.86451E+00
1.31	1.23819	.74448E+00	.35603E+00	.47823E+00	.10706E+01	.86283E+00
1.32	1.24521	.74158E+00	.35119E+00	.47358E+00	.10750E+01	.86115E+00
1.33	1.25218	.73867E+00	.34640E+00	.46895E+00	.10796E+01	.85946E+00
1.34	1.25912	.73577E+00	.34166E+00	.46436E+00	.10842E+01	.85777E+00
1.35	1.26601	.73287E+00	.33697E+00	.45980E+00	.10890E+01	.85608E+00
1.36	1.27286	.72997E+00	.33233E+00	.45526E+00	.10940E+01	.85438E+00
1.37	1.27967	.72707E+00	.32773E+00	.45076E+00	.10990E+01	.85269E+00
1.38	1.28645	.72418E+00	.32319E+00	.44628E+00	.11042E+01	.85099E+00
1.39	1.29318	.72128E+00	.31869E+00	.44184E+00	.11095E+01	.84928E+00
1.40	1.29987	.71839E+00	.31424E+00	.43742E+00	.11149E+01	.84758E+00
1.41	1.30652	.71550E+00	.30984E+00	.43304E+00	.11205E+01	.84587E+00
1.42	1.31313	.71262E+00	.30549E+00	.42869E+00	.11262E+01	.84417E+00
1.43	1.31970	.70973E+00	.30119E+00	.42436E+00	.11320E+01	.84246E+00
1.44	1.32623	.70685E+00	.29693E+00	.42007E+00	.11379E+01	.84075E+00
1.45	1.33272	.70398E+00	.29272E+00	.41581E+00	.11440E+01	.83903E+00
1.46	1.33917	.70111E+00	.28856E+00	.41158E+00	.11501E+01	.83732E+00
1.47	1.34558	.69824E+00	.28445E+00	.40739E+00	.11565E+01	.83561E+00
1.48	1.35195	.69537E+00	.28039E+00	.40322E+00	.11629E+01	.83389E+00
1.49	1.35828	.69251E+00	.27637E+00	.39909E+00	.11695E+01	.83217E+00

(continua)

M	M^*	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{a}{a_0}$
1.50	1.36458	.68966E+00	.27240E+00	.39498E+00	.11762E+01	.83046E+00
1.51	1.37083	.68680E+00	.26848E+00	.39091E+00	.11830E+01	.82874E+00
1.52	1.37705	.68396E+00	.26461E+00	.38688E+00	.11899E+01	.82702E+00
1.53	1.38322	.68112E+00	.26078E+00	.38287E+00	.11970E+01	.82530E+00
1.54	1.38936	.67828E+00	.25700E+00	.37890E+00	.12042E+01	.82358E+00
1.55	1.39546	.67545E+00	.25326E+00	.37496E+00	.12116E+01	.82186E+00
1.56	1.40152	.67262E+00	.24957E+00	.37105E+00	.12190E+01	.82014E+00
1.57	1.40755	.66980E+00	.24593E+00	.36717E+00	.12266E+01	.81841E+00
1.58	1.41353	.66699E+00	.24233E+00	.36332E+00	.12344E+01	.81669E+00
1.59	1.41948	.66418E+00	.23878E+00	.35951E+00	.12422E+01	.81497E+00
1.60	1.42539	.66138E+00	.23527E+00	.35573E+00	.12502E+01	.81325E+00
1.61	1.43127	.65858E+00	.23181E+00	.35198E+00	.12584E+01	.81153E+00
1.62	1.43710	.65579E+00	.22839E+00	.34827E+00	.12666E+01	.80981E+00
1.63	1.44290	.65301E+00	.22501E+00	.34458E+00	.12750E+01	.80809E+00
1.64	1.44866	.65023E+00	.22168E+00	.34093E+00	.12836E+01	.80637E+00
1.65	1.45439	.64746E+00	.21840E+00	.33731E+00	.12922E+01	.80465E+00
1.66	1.46008	.64470E+00	.21515E+00	.33372E+00	.13010E+01	.80293E+00
1.67	1.46573	.64194E+00	.21195E+00	.33017E+00	.13100E+01	.80121E+00
1.68	1.47135	.63919E+00	.20879E+00	.32664E+00	.13190E+01	.79949E+00
1.69	1.47693	.63645E+00	.20567E+00	.32315E+00	.13283E+01	.79778E+00
1.70	1.48247	.63371E+00	.20259E+00	.31969E+00	.13376E+01	.79606E+00
1.71	1.48798	.63099E+00	.19956E+00	.31626E+00	.13471E+01	.79435E+00
1.72	1.49345	.62827E+00	.19656E+00	.31287E+00	.13567E+01	.79263E+00
1.73	1.49889	.62556E+00	.19361E+00	.30950E+00	.13665E+01	.79092E+00
1.74	1.50429	.62285E+00	.19070E+00	.30617E+00	.13764E+01	.78921E+00
1.75	1.50966	.62016E+00	.18782E+00	.30287E+00	.13865E+01	.78750E+00
1.76	1.51499	.61747E+00	.18499E+00	.29960E+00	.13967E+01	.78579E+00
1.77	1.52029	.61479E+00	.18220E+00	.29635E+00	.14070E+01	.78408E+00
1.78	1.52555	.61212E+00	.17944E+00	.29315E+00	.14175E+01	.78238E+00
1.79	1.53078	.60945E+00	.17672E+00	.28997E+00	.14282E+01	.78067E+00
1.80	1.53598	.60680E+00	.17404E+00	.28682E+00	.14390E+01	.77897E+00
1.81	1.54114	.60415E+00	.17140E+00	.28370E+00	.14499E+01	.77727E+00
1.82	1.54626	.60151E+00	.16879E+00	.28061E+00	.14610E+01	.77557E+00
1.83	1.55136	.59888E+00	.16622E+00	.27756E+00	.14723E+01	.77387E+00
1.84	1.55642	.59626E+00	.16369E+00	.27453E+00	.14836E+01	.77218E+00
1.85	1.56144	.59365E+00	.16120E+00	.27153E+00	.14952E+01	.77049E+00
1.86	1.56644	.59104E+00	.15873E+00	.26857E+00	.15069E+01	.76879E+00
1.87	1.57140	.58845E+00	.15631E+00	.26563E+00	.15187E+01	.76711E+00
1.88	1.57633	.58586E+00	.15392E+00	.26272E+00	.15308E+01	.76542E+00
1.89	1.58122	.58329E+00	.15156E+00	.25984E+00	.15429E+01	.76373E+00
1.90	1.58609	.58072E+00	.14924E+00	.25699E+00	.15553E+01	.76205E+00
1.91	1.59092	.57816E+00	.14695E+00	.25417E+00	.15677E+01	.76037E+00
1.92	1.59572	.57561E+00	.14470E+00	.25138E+00	.15804E+01	.75869E+00
1.93	1.60049	.57307E+00	.14247E+00	.24861E+00	.15932E+01	.75702E+00
1.94	1.60522	.57054E+00	.14028E+00	.24588E+00	.16062E+01	.75534E+00
1.95	1.60993	.56802E+00	.13813E+00	.24317E+00	.16193E+01	.75367E+00
1.96	1.61460	.56551E+00	.13600E+00	.24049E+00	.16326E+01	.75200E+00
1.97	1.61925	.56301E+00	.13390E+00	.23784E+00	.16461E+01	.75034E+00
1.98	1.62386	.56051E+00	.13184E+00	.23521E+00	.16597E+01	.74867E+00
1.99	1.62844	.55803E+00	.12981E+00	.23262E+00	.16735E+01	.74701E+00

(continua)

M	M^*	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{p}{p_i}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{a}{a_i}$
2.00	1.63299	.55556E+00	.12780E+00	.23005E+00	.16875E+01	.74536E+00
2.01	1.63751	.55309E+00	.12583E+00	.22751E+00	.17016E+01	.74370E+00
2.02	1.64200	.55064E+00	.12389E+00	.22499E+00	.17160E+01	.74205E+00
2.03	1.64647	.54819E+00	.12197E+00	.22250E+00	.17305E+01	.74040E+00
2.04	1.65090	.54576E+00	.12009E+00	.22004E+00	.17451E+01	.73875E+00
2.05	1.65530	.54333E+00	.11823E+00	.21760E+00	.17600E+01	.73711E+00
2.06	1.65967	.54092E+00	.11640E+00	.21519E+00	.17750E+01	.73547E+00
2.07	1.66401	.53851E+00	.11460E+00	.21281E+00	.17902E+01	.73383E+00
2.08	1.66833	.53611E+00	.11282E+00	.21045E+00	.18056E+01	.73220E+00
2.09	1.67262	.53373E+00	.11107E+00	.20811E+00	.18212E+01	.73057E+00
2.10	1.67687	.53135E+00	.10935E+00	.20580E+00	.18369E+01	.72894E+00
2.11	1.68110	.52898E+00	.10766E+00	.20352E+00	.18529E+01	.72731E+00
2.12	1.68530	.52663E+00	.10599E+00	.20126E+00	.18690E+01	.72569E+00
2.13	1.68947	.52428E+00	.10434E+00	.19903E+00	.18853E+01	.72407E+00
2.14	1.69362	.52194E+00	.10273E+00	.19681E+00	.19018E+01	.72246E+00
2.15	1.69774	.51962E+00	.10113E+00	.19463E+00	.19185E+01	.72084E+00
2.16	1.70182	.51730E+00	.99562E-01	.19247E+00	.19354E+01	.71923E+00
2.17	1.70589	.51499E+00	.98017E-01	.19033E+00	.19525E+01	.71763E+00
2.18	1.70992	.51269E+00	.96495E-01	.18821E+00	.19698E+01	.71603E+00
2.19	1.71393	.51041E+00	.94997E-01	.18612E+00	.19873E+01	.71443E+00
2.20	1.71791	.50813E+00	.93522E-01	.18405E+00	.20050E+01	.71283E+00
2.21	1.72187	.50586E+00	.92070E-01	.18200E+00	.20229E+01	.71124E+00
2.22	1.72579	.50361E+00	.90640E-01	.17998E+00	.20409E+01	.70965E+00
2.23	1.72970	.50136E+00	.89232E-01	.17798E+00	.20592E+01	.70807E+00
2.24	1.73357	.49912E+00	.87846E-01	.17600E+00	.20777E+01	.70649E+00
2.25	1.73742	.49689E+00	.86482E-01	.17404E+00	.20964E+01	.70491E+00
2.26	1.74125	.49468E+00	.85139E-01	.17211E+00	.21153E+01	.70333E+00
2.27	1.74504	.49247E+00	.83817E-01	.17020E+00	.21345E+01	.70176E+00
2.28	1.74882	.49027E+00	.82515E-01	.16830E+00	.21538E+01	.70020E+00
2.29	1.75256	.48809E+00	.81234E-01	.16643E+00	.21734E+01	.69863E+00
2.30	1.75629	.48591E+00	.79973E-01	.16458E+00	.21931E+01	.69707E+00
2.31	1.75999	.48374E+00	.78731E-01	.16275E+00	.22131E+01	.69552E+00
2.32	1.76366	.48158E+00	.77509E-01	.16095E+00	.22333E+01	.69396E+00
2.33	1.76731	.47944E+00	.76306E-01	.15916E+00	.22537E+01	.69241E+00
2.34	1.77093	.47730E+00	.75122E-01	.15739E+00	.22744E+01	.69087E+00
2.35	1.77453	.47517E+00	.73957E-01	.15564E+00	.22953E+01	.68933E+00
2.36	1.77811	.47306E+00	.72810E-01	.15391E+00	.23164E+01	.68779E+00
2.37	1.78166	.47095E+00	.71681E-01	.15221E+00	.23377E+01	.68626E+00
2.38	1.78519	.46885E+00	.70570E-01	.15052E+00	.23593E+01	.68473E+00
2.39	1.78869	.46676E+00	.69476E-01	.14885E+00	.23811E+01	.68320E+00
2.40	1.79218	.46468E+00	.68400E-01	.14720E+00	.24031E+01	.68168E+00
2.41	1.79563	.46262E+00	.67340E-01	.14556E+00	.24254E+01	.68016E+00
2.42	1.79907	.46056E+00	.66297E-01	.14395E+00	.24479E+01	.67864E+00
2.43	1.80248	.45851E+00	.65271E-01	.14235E+00	.24706E+01	.67713E+00
2.44	1.80587	.45647E+00	.64261E-01	.14078E+00	.24936E+01	.67563E+00
2.45	1.80924	.45444E+00	.63267E-01	.13922E+00	.25168E+01	.67412E+00
2.46	1.81258	.45242E+00	.62289E-01	.13768E+00	.25403E+01	.67262E+00
2.47	1.81591	.45041E+00	.61326E-01	.13615E+00	.25640E+01	.67113E+00
2.48	1.81921	.44841E+00	.60378E-01	.13465E+00	.25880E+01	.66964E+00
2.49	1.82248	.44642E+00	.59446E-01	.13316E+00	.26122E+01	.66815E+00

(continua)

M	M^*	$\frac{T}{T_t}$	$\frac{p}{p_t}$	$\frac{\rho}{\rho_t}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{a}{a_t}$
2.50	1.82574	.44444E+00	.58528E-01	.13169E+00	.26367E+01	.66667E+00
2.51	1.82898	.44247E+00	.57625E-01	.13023E+00	.26615E+01	.66519E+00
2.52	1.83219	.44051E+00	.56736E-01	.12879E+00	.26864E+01	.66371E+00
2.53	1.83538	.43856E+00	.55861E-01	.12737E+00	.27117E+01	.66224E+00
2.54	1.83855	.43662E+00	.55000E-01	.12597E+00	.27372E+01	.66077E+00
2.55	1.84170	.43469E+00	.54153E-01	.12458E+00	.27630E+01	.65931E+00
2.56	1.84483	.43277E+00	.53319E-01	.12321E+00	.27891E+01	.65785E+00
2.57	1.84794	.43085E+00	.52499E-01	.12185E+00	.28154E+01	.65639E+00
2.58	1.85103	.42895E+00	.51692E-01	.12051E+00	.28420E+01	.65494E+00
2.59	1.85410	.42706E+00	.50897E-01	.11918E+00	.28688E+01	.65349E+00
2.60	1.85714	.42517E+00	.50115E-01	.11787E+00	.28960E+01	.65205E+00
2.61	1.86017	.42330E+00	.49346E-01	.11658E+00	.29234E+01	.65061E+00
2.62	1.86318	.42143E+00	.48589E-01	.11530E+00	.29511E+01	.64918E+00
2.63	1.86616	.41957E+00	.47844E-01	.11403E+00	.29791E+01	.64774E+00
2.64	1.86913	.41773E+00	.47110E-01	.11278E+00	.30073E+01	.64632E+00
2.65	1.87208	.41589E+00	.46389E-01	.11154E+00	.30359E+01	.64489E+00
2.66	1.87501	.41406E+00	.45679E-01	.11032E+00	.30647E+01	.64347E+00
2.67	1.87792	.41224E+00	.44980E-01	.10911E+00	.30938E+01	.64206E+00
2.68	1.88081	.41043E+00	.44293E-01	.10792E+00	.31233E+01	.64065E+00
2.69	1.88368	.40863E+00	.43616E-01	.10674E+00	.31530E+01	.63924E+00
2.70	1.88653	.40684E+00	.42950E-01	.10557E+00	.31830E+01	.63784E+00
2.71	1.88936	.40505E+00	.42295E-01	.10442E+00	.32133E+01	.63644E+00
2.72	1.89218	.40328E+00	.41650E-01	.10328E+00	.32439E+01	.63504E+00
2.73	1.89497	.40151E+00	.41016E-01	.10215E+00	.32749E+01	.63365E+00
2.74	1.89775	.39976E+00	.40391E-01	.10104E+00	.33061E+01	.63226E+00
2.75	1.90051	.39801E+00	.39777E-01	.99939E-01	.33377E+01	.63088E+00
2.76	1.90325	.39627E+00	.39172E-01	.98852E-01	.33695E+01	.62950E+00
2.77	1.90598	.39454E+00	.38577E-01	.97777E-01	.34017E+01	.62813E+00
2.78	1.90868	.39282E+00	.37992E-01	.96714E-01	.34342E+01	.62676E+00
2.79	1.91137	.39111E+00	.37415E-01	.95664E-01	.34670E+01	.62539E+00
2.80	1.91404	.38941E+00	.36848E-01	.94627E-01	.35001E+01	.62403E+00
2.81	1.91669	.38771E+00	.36290E-01	.93601E-01	.35336E+01	.62267E+00
2.82	1.91933	.38603E+00	.35741E-01	.92587E-01	.35674E+01	.62131E+00
2.83	1.92195	.38435E+00	.35201E-01	.91585E-01	.36015E+01	.61996E+00
2.84	1.92455	.38268E+00	.34669E-01	.90595E-01	.36359E+01	.61862E+00
2.85	1.92713	.38103E+00	.34146E-01	.89616E-01	.36707E+01	.61727E+00
2.86	1.92970	.37937E+00	.33631E-01	.88648E-01	.37058E+01	.61593E+00
2.87	1.93225	.37773E+00	.33124E-01	.87692E-01	.37413E+01	.61460E+00
2.88	1.93479	.37610E+00	.32625E-01	.86747E-01	.37771E+01	.61327E+00
2.89	1.93731	.37447E+00	.32135E-01	.85813E-01	.38133E+01	.61194E+00
2.90	1.93981	.37286E+00	.31652E-01	.84890E-01	.38498E+01	.61062E+00
2.91	1.94230	.37125E+00	.31176E-01	.83977E-01	.38866E+01	.60930E+00
2.92	1.94477	.36965E+00	.30709E-01	.83075E-01	.39238E+01	.60799E+00
2.93	1.94722	.36806E+00	.30248E-01	.82184E-01	.39614E+01	.60668E+00
2.94	1.94966	.36647E+00	.29795E-01	.81302E-01	.39993E+01	.60537E+00
2.95	1.95208	.36490E+00	.29349E-01	.80432E-01	.40376E+01	.60407E+00
2.96	1.95449	.36333E+00	.28910E-01	.79571E-01	.40762E+01	.60277E+00
2.97	1.95688	.36177E+00	.28479E-01	.78720E-01	.41153E+01	.60147E+00
2.98	1.95925	.36022E+00	.28054E-01	.77879E-01	.41547E+01	.60018E+00
2.99	1.96161	.35868E+00	.27635E-01	.77048E-01	.41944E+01	.59890E+00

(continua)

M	M^*	$\frac{T}{T_t}$	$\frac{p}{p_t}$	$\frac{\rho}{\rho_t}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{a}{a_t}$
3.00	1.96396	.35714E+00	.27224E-01	.76227E-01	.42346E+01	.59761E+00
3.05	1.97547	.34959E+00	.25261E-01	.72260E-01	.44410E+01	.59126E+00
3.10	1.98661	.34223E+00	.23449E-01	.68517E-01	.46573E+01	.58501E+00
3.15	1.99740	.33506E+00	.21775E-01	.64986E-01	.48838E+01	.57885E+00
3.20	2.00786	.32808E+00	.20228E-01	.61654E-01	.51209E+01	.57279E+00
3.25	2.01799	.32129E+00	.18798E-01	.58510E-01	.53691E+01	.56682E+00
3.30	2.02781	.31466E+00	.17477E-01	.55541E-01	.56286E+01	.56095E+00
3.35	2.03733	.30821E+00	.16255E-01	.52739E-01	.59000E+01	.55517E+00
3.40	2.04656	.30193E+00	.15125E-01	.50093E-01	.61837E+01	.54948E+00
3.45	2.05551	.29581E+00	.14079E-01	.47594E-01	.64801E+01	.54389E+00
3.50	2.06419	.28986E+00	.13111E-01	.45233E-01	.67896E+01	.53838E+00
3.55	2.07261	.28405E+00	.12215E-01	.43002E-01	.71128E+01	.53296E+00
3.60	2.08077	.27840E+00	.11385E-01	.40894E-01	.74501E+01	.52763E+00
3.65	2.08870	.27289E+00	.10616E-01	.38901E-01	.78020E+01	.52239E+00
3.70	2.09639	.26752E+00	.99029E-02	.37017E-01	.81690E+01	.51723E+00
3.75	2.10386	.26230E+00	.92420E-02	.35235E-01	.85517E+01	.51215E+00
3.80	2.11111	.25720E+00	.86290E-02	.33549E-01	.89506E+01	.50715E+00
3.85	2.11815	.25224E+00	.80601E-02	.31954E-01	.93661E+01	.50223E+00
3.90	2.12499	.24740E+00	.75321E-02	.30445E-01	.97989E+01	.49740E+00
3.95	2.13163	.24269E+00	.70417E-02	.29015E-01	.10250E+02	.49264E+00
4.00	2.13809	.23810E+00	.65861E-02	.27662E-01	.10719E+02	.48795E+00
4.05	2.14436	.23362E+00	.61627E-02	.26379E-01	.11207E+02	.48334E+00
4.10	2.15046	.22925E+00	.57690E-02	.25164E-01	.11715E+02	.47880E+00
4.15	2.15639	.22500E+00	.54028E-02	.24013E-01	.12243E+02	.47434E+00
4.20	2.16215	.22085E+00	.50621E-02	.22921E-01	.12792E+02	.46994E+00
4.25	2.16776	.21680E+00	.47449E-02	.21886E-01	.13362E+02	.46562E+00
4.30	2.17321	.21286E+00	.44494E-02	.20903E-01	.13955E+02	.46136E+00
4.35	2.17852	.20901E+00	.41742E-02	.19971E-01	.14571E+02	.45717E+00
4.40	2.18368	.20525E+00	.39176E-02	.19087E-01	.15210E+02	.45305E+00
4.45	2.18871	.20159E+00	.36784E-02	.18247E-01	.15873E+02	.44899E+00
4.50	2.19360	.19802E+00	.34553E-02	.17449E-01	.16562E+02	.44499E+00
4.55	2.19836	.19453E+00	.32470E-02	.16691E-01	.17277E+02	.44106E+00
4.60	2.20300	.19113E+00	.30526E-02	.15971E-01	.18018E+02	.43719E+00
4.65	2.20752	.18781E+00	.28709E-02	.15286E-01	.18786E+02	.43337E+00
4.70	2.21192	.18457E+00	.27012E-02	.14635E-01	.19583E+02	.42962E+00
4.75	2.21621	.18141E+00	.25426E-02	.14016E-01	.20408E+02	.42592E+00
4.80	2.22038	.17832E+00	.23943E-02	.13427E-01	.21264E+02	.42228E+00
4.85	2.22445	.17530E+00	.22555E-02	.12866E-01	.22150E+02	.41869E+00
4.90	2.22842	.17235E+00	.21256E-02	.12333E-01	.23067E+02	.41516E+00
4.95	2.23229	.16948E+00	.20040E-02	.11824E-01	.24017E+02	.41168E+00
5.00	2.23607	.16667E+00	.18900E-02	.11340E-01	.25000E+02	.40825E+00
5.10	2.24334	.16124E+00	.16832E-02	.10439E-01	.27070E+02	.40154E+00
5.20	2.25026	.15605E+00	.15013E-02	.96204E-02	.29283E+02	.39504E+00
5.30	2.25685	.15110E+00	.13411E-02	.88753E-02	.31649E+02	.38872E+00
5.40	2.26314	.14637E+00	.11997E-02	.81965E-02	.34175E+02	.38258E+00
5.50	2.26913	.14184E+00	.10748E-02	.75775E-02	.36869E+02	.37662E+00
5.60	2.27484	.13751E+00	.96430E-03	.70124E-02	.39740E+02	.37083E+00
5.70	2.28030	.13337E+00	.86635E-03	.64959E-02	.42797E+02	.36520E+00
5.80	2.28552	.12940E+00	.77941E-03	.60233E-02	.46050E+02	.35972E+00
5.90	2.29051	.12560E+00	.70214E-03	.55904E-02	.49507E+02	.35440E+00

(continua)

M	M^*	$\frac{T_f}{T_0}$	$\frac{p_f}{p_0}$	$\frac{\rho_f}{\rho_0}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{a_f}{a_0}$
6.00	2.29528	.12195E+00	.63336E-03	.51936E-02	.53180E+02	.34922E+00
6.10	2.29984	.11846E+00	.57206E-03	.48293E-02	.57077E+02	.34417E+00
6.20	2.30421	.11510E+00	.51735E-03	.44947E-02	.61210E+02	.33927E+00
6.30	2.30840	.11188E+00	.46845E-03	.41870E-02	.65590E+02	.33449E+00
6.40	2.31241	.10879E+00	.42468E-03	.39037E-02	.70227E+02	.32983E+00
6.50	2.31626	.10582E+00	.38547E-03	.36427E-02	.75134E+02	.32530E+00
6.60	2.31996	.10297E+00	.35028E-03	.34020E-02	.80323E+02	.32088E+00
6.70	2.32351	.10022E+00	.31868E-03	.31797E-02	.85805E+02	.31658E+00
6.80	2.32691	.97580E-01	.29024E-03	.29744E-02	.91593E+02	.31238E+00
6.90	2.33019	.95039E-01	.26464E-03	.27845E-02	.97702E+02	.30828E+00
7.00	2.33333	.92593E-01	.24156E-03	.26088E-02	.10414E+03	.30429E+00
7.10	2.33636	.90236E-01	.22072E-03	.24460E-02	.11093E+03	.30039E+00
7.20	2.33927	.87966E-01	.20189E-03	.22950E-02	.11808E+03	.29659E+00
7.30	2.34208	.85778E-01	.18485E-03	.21550E-02	.12560E+03	.29288E+00
7.40	2.34478	.83668E-01	.16942E-03	.20249E-02	.13352E+03	.28925E+00
7.50	2.34738	.81633E-01	.15543E-03	.19040E-02	.14184E+03	.28571E+00
7.60	2.34989	.79669E-01	.14273E-03	.17915E-02	.15058E+03	.28226E+00
7.70	2.35231	.77773E-01	.13119E-03	.16868E-02	.15977E+03	.27888E+00
7.80	2.35464	.75942E-01	.12069E-03	.15893E-02	.16940E+03	.27558E+00
7.90	2.35690	.74173E-01	.11114E-03	.14984E-02	.17951E+03	.27235E+00
8.00	2.35907	.72464E-01	.10243E-03	.14135E-02	.19011E+03	.26919E+00
8.10	2.36117	.70812E-01	.94485E-04	.13343E-02	.20121E+03	.26610E+00
8.20	2.36320	.69214E-01	.87232E-04	.12603E-02	.21285E+03	.26309E+00
8.30	2.36516	.67668E-01	.80602E-04	.11911E-02	.22502E+03	.26013E+00
8.40	2.36706	.66173E-01	.74537E-04	.11264E-02	.23776E+03	.25724E+00
8.50	2.36889	.64725E-01	.68984E-04	.10658E-02	.25109E+03	.25441E+00
8.60	2.37067	.63323E-01	.63895E-04	.10090E-02	.26501E+03	.25164E+00
8.70	2.37238	.61966E-01	.59228E-04	.95582E-03	.27957E+03	.24893E+00
8.80	2.37405	.60650E-01	.54943E-04	.90590E-03	.29477E+03	.24627E+00
8.90	2.37566	.59375E-01	.51006E-04	.85904E-03	.31063E+03	.24367E+00
9.00	2.37722	.58140E-01	.47386E-04	.81504E-03	.32719E+03	.24112E+00
9.10	2.37873	.56941E-01	.44055E-04	.77369E-03	.34446E+03	.23862E+00
9.20	2.38020	.55779E-01	.40986E-04	.73480E-03	.36246E+03	.23618E+00
9.30	2.38162	.54651E-01	.38158E-04	.69822E-03	.38123E+03	.23378E+00
9.40	2.38299	.53556E-01	.35549E-04	.66378E-03	.40078E+03	.23142E+00
9.50	2.38433	.52493E-01	.33141E-04	.63134E-03	.42113E+03	.22911E+00
9.60	2.38563	.51461E-01	.30916E-04	.60077E-03	.44232E+03	.22685E+00
9.70	2.38689	.50459E-01	.28860E-04	.57194E-03	.46437E+03	.22463E+00
9.80	2.38811	.49485E-01	.26957E-04	.54474E-03	.48731E+03	.22245E+00
9.90	2.38930	.48539E-01	.25195E-04	.51907E-03	.51115E+03	.22032E+00
10.00	2.39046	.47619E-01	.23563E-04	.49482E-03	.53594E+03	.21822E+00
11.00	2.40040	.39683E-01	.12448E-04	.31369E-03	.84191E+03	.19920E+00
12.00	2.40804	.33557E-01	.69222E-05	.20628E-03	.12762E+04	.18319E+00
13.00	2.41404	.28736E-01	.40223E-05	.13998E-03	.18761E+04	.16952E+00
14.00	2.41883	.24876E-01	.24278E-05	.97596E-04	.26854E+04	.15772E+00
15.00	2.42272	.21739E-01	.15148E-05	.69679E-04	.37553E+04	.14744E+00
16.00	2.42591	.19157E-01	.97309E-06	.50795E-04	.51446E+04	.13841E+00
17.00	2.42857	.17007E-01	.64147E-06	.37719E-04	.69205E+04	.13041E+00
18.00	2.43081	.15198E-01	.43272E-06	.28473E-04	.91593E+04	.12328E+00
19.00	2.43270	.13661E-01	.29800E-06	.21813E-04	.11946E+05	.11688E+00
20.00	2.43432	.12346E-01	.20907E-06	.16935E-04	.15377E+05	.11111E+00
∞	2.44950	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00	∞	.00000E+00

TABELLA 6.2
URTO NORMALE, $\gamma=1.4$ ($\theta = t = \text{totale}$)

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{A_1^*}{A_2^*}$	$\frac{a_2}{a_1}$
1.00	1.00000	.10000E+01	.10000E+01	.10000E+01	.10000E+01	.10000E+01
1.01	.99013	.10167E+01	.10066E+01	.10234E+01	.10000E+01	.10033E+01
1.02	.98052	.10334E+01	.10132E+01	.10471E+01	.99999E+00	.10066E+01
1.03	.97115	.10502E+01	.10198E+01	.10710E+01	.99997E+00	.10099E+01
1.04	.96203	.10671E+01	.10263E+01	.10952E+01	.99992E+00	.10131E+01
1.05	.95313	.10840E+01	.10328E+01	.11196E+01	.99985E+00	.10163E+01
1.06	.94445	.11009E+01	.10393E+01	.11442E+01	.99975E+00	.10195E+01
1.07	.93598	.11179E+01	.10458E+01	.11690E+01	.99961E+00	.10226E+01
1.08	.92771	.11349E+01	.10522E+01	.11941E+01	.99943E+00	.10258E+01
1.09	.91965	.11520E+01	.10586E+01	.12194E+01	.99920E+00	.10289E+01
1.10	.91177	.11691E+01	.10649E+01	.12450E+01	.99893E+00	.10320E+01
1.11	.90408	.11862E+01	.10713E+01	.12708E+01	.99860E+00	.10350E+01
1.12	.89656	.12034E+01	.10776E+01	.12968E+01	.99821E+00	.10381E+01
1.13	.88922	.12206E+01	.10840E+01	.13230E+01	.99777E+00	.10411E+01
1.14	.88204	.12378E+01	.10903E+01	.13495E+01	.99726E+00	.10442E+01
1.15	.87502	.12550E+01	.10966E+01	.13762E+01	.99669E+00	.10472E+01
1.16	.86816	.12723E+01	.11029E+01	.14032E+01	.99605E+00	.10502E+01
1.17	.86145	.12896E+01	.11092E+01	.14304E+01	.99535E+00	.10532E+01
1.18	.85488	.13069E+01	.11154E+01	.14578E+01	.99457E+00	.10561E+01
1.19	.84846	.13243E+01	.11217E+01	.14854E+01	.99372E+00	.10591E+01
1.20	.84217	.13416E+01	.11280E+01	.15133E+01	.99280E+00	.10621E+01
1.21	.83601	.13590E+01	.11343E+01	.15414E+01	.99180E+00	.10650E+01
1.22	.82999	.13764E+01	.11405E+01	.15698E+01	.99073E+00	.10680E+01
1.23	.82408	.13938E+01	.11468E+01	.15984E+01	.98958E+00	.10709E+01
1.24	.81830	.14112E+01	.11531E+01	.16272E+01	.98836E+00	.10738E+01
1.25	.81264	.14286E+01	.11594E+01	.16562E+01	.98706E+00	.10767E+01
1.26	.80709	.14460E+01	.11657E+01	.16855E+01	.98568E+00	.10797E+01
1.27	.80165	.14634E+01	.11720E+01	.17150E+01	.98422E+00	.10826E+01
1.28	.79631	.14808E+01	.11783E+01	.17448E+01	.98268E+00	.10855E+01
1.29	.79108	.14983E+01	.11846E+01	.17748E+01	.98107E+00	.10884E+01
1.30	.78596	.15157E+01	.11909E+01	.18050E+01	.97937E+00	.10913E+01
1.31	.78093	.15331E+01	.11972E+01	.18354E+01	.97760E+00	.10942E+01
1.32	.77600	.15505E+01	.12035E+01	.18661E+01	.97575E+00	.10971E+01
1.33	.77116	.15680E+01	.12099E+01	.18970E+01	.97382E+00	.10999E+01
1.34	.76641	.15854E+01	.12162E+01	.19282E+01	.97182E+00	.11028E+01
1.35	.76175	.16028E+01	.12226E+01	.19596E+01	.96974E+00	.11057E+01
1.36	.75718	.16202E+01	.12290E+01	.19912E+01	.96758E+00	.11086E+01
1.37	.75269	.16376E+01	.12354E+01	.20230E+01	.96534E+00	.11115E+01
1.38	.74829	.16549E+01	.12418E+01	.20551E+01	.96304E+00	.11144E+01
1.39	.74396	.16723E+01	.12482E+01	.20874E+01	.96065E+00	.11172E+01
1.40	.73971	.16897E+01	.12547E+01	.21200E+01	.95819E+00	.11201E+01
1.41	.73554	.17070E+01	.12612E+01	.21528E+01	.95566E+00	.11230E+01
1.42	.73144	.17243E+01	.12676E+01	.21858E+01	.95306E+00	.11259E+01
1.43	.72741	.17416E+01	.12741E+01	.22190E+01	.95039E+00	.11288E+01
1.44	.72345	.17589E+01	.12807E+01	.22525E+01	.94765E+00	.11317E+01
1.45	.71956	.17761E+01	.12872E+01	.22862E+01	.94484E+00	.11346E+01
1.46	.71574	.17934E+01	.12938E+01	.23202E+01	.94196E+00	.11374E+01
1.47	.71198	.18106E+01	.13003E+01	.23544E+01	.93901E+00	.11403E+01
1.48	.70829	.18278E+01	.13069E+01	.23888E+01	.93600E+00	.11432E+01
1.49	.70466	.18449E+01	.13136E+01	.24234E+01	.93293E+00	.11461E+01

(continua)

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{A_1^*}{A_2^*}$	$\frac{a_2}{a_1}$
1.50	.70109	.18621E+01	.13202E+01	.24583E+01	.92979E+00	.11490E+01
1.51	.69758	.18792E+01	.13269E+01	.24934E+01	.92659E+00	.11519E+01
1.52	.69413	.18963E+01	.13336E+01	.25288E+01	.92332E+00	.11548E+01
1.53	.69073	.19133E+01	.13403E+01	.25644E+01	.92000E+00	.11577E+01
1.54	.68739	.19303E+01	.13470E+01	.26002E+01	.91662E+00	.11606E+01
1.55	.68410	.19473E+01	.13538E+01	.26362E+01	.91319E+00	.11635E+01
1.56	.68087	.19643E+01	.13606E+01	.26725E+01	.90970E+00	.11664E+01
1.57	.67769	.19812E+01	.13674E+01	.27090E+01	.90615E+00	.11694E+01
1.58	.67455	.19981E+01	.13742E+01	.27458E+01	.90255E+00	.11723E+01
1.59	.67147	.20149E+01	.13811E+01	.27828E+01	.89890E+00	.11752E+01
1.60	.66844	.20317E+01	.13880E+01	.28200E+01	.89520E+00	.11781E+01
1.61	.66545	.20485E+01	.13949E+01	.28574E+01	.89145E+00	.11811E+01
1.62	.66251	.20653E+01	.14018E+01	.28951E+01	.88765E+00	.11840E+01
1.63	.65962	.20820E+01	.14088E+01	.29330E+01	.88381E+00	.11869E+01
1.64	.65677	.20986E+01	.14158E+01	.29712E+01	.87992E+00	.11899E+01
1.65	.65396	.21152E+01	.14228E+01	.30096E+01	.87599E+00	.11928E+01
1.66	.65119	.21318E+01	.14299E+01	.30482E+01	.87201E+00	.11958E+01
1.67	.64847	.21484E+01	.14369E+01	.30870E+01	.86800E+00	.11987E+01
1.68	.64579	.21649E+01	.14440E+01	.31261E+01	.86394E+00	.12017E+01
1.69	.64315	.21813E+01	.14512E+01	.31654E+01	.85985E+00	.12046E+01
1.70	.64054	.21977E+01	.14583E+01	.32050E+01	.85572E+00	.12076E+01
1.71	.63798	.22141E+01	.14655E+01	.32448E+01	.85156E+00	.12106E+01
1.72	.63545	.22304E+01	.14727E+01	.32848E+01	.84736E+00	.12136E+01
1.73	.63296	.22467E+01	.14800E+01	.33250E+01	.84312E+00	.12165E+01
1.74	.63051	.22629E+01	.14873E+01	.33655E+01	.83886E+00	.12195E+01
1.75	.62809	.22791E+01	.14946E+01	.34062E+01	.83457E+00	.12225E+01
1.76	.62570	.22952E+01	.15019E+01	.34472E+01	.83024E+00	.12255E+01
1.77	.62335	.23113E+01	.15093E+01	.34884E+01	.82589E+00	.12285E+01
1.78	.62104	.23273E+01	.15167E+01	.35298E+01	.82151E+00	.12315E+01
1.79	.61875	.23433E+01	.15241E+01	.35714E+01	.81711E+00	.12346E+01
1.80	.61650	.23592E+01	.15316E+01	.36133E+01	.81268E+00	.12376E+01
1.81	.61428	.23751E+01	.15391E+01	.36554E+01	.80824E+00	.12406E+01
1.82	.61209	.23909E+01	.15466E+01	.36978E+01	.80376E+00	.12436E+01
1.83	.60993	.24067E+01	.15541E+01	.37404E+01	.79927E+00	.12467E+01
1.84	.60780	.24224E+01	.15617E+01	.37832E+01	.79476E+00	.12497E+01
1.85	.60570	.24381E+01	.15693E+01	.38262E+01	.79023E+00	.12527E+01
1.86	.60363	.24537E+01	.15770E+01	.38695E+01	.78569E+00	.12558E+01
1.87	.60159	.24693E+01	.15847E+01	.39130E+01	.78113E+00	.12588E+01
1.88	.59957	.24848E+01	.15924E+01	.39568E+01	.77655E+00	.12619E+01
1.89	.59758	.25003E+01	.16001E+01	.40008E+01	.77196E+00	.12650E+01
1.90	.59562	.25157E+01	.16079E+01	.40450E+01	.76736E+00	.12680E+01
1.91	.59368	.25310E+01	.16157E+01	.40894E+01	.76274E+00	.12711E+01
1.92	.59177	.25463E+01	.16236E+01	.41341E+01	.75812E+00	.12742E+01
1.93	.58988	.25616E+01	.16314E+01	.41790E+01	.75349E+00	.12773E+01
1.94	.58802	.25767E+01	.16394E+01	.42242E+01	.74884E+00	.12804E+01
1.95	.58619	.25919E+01	.16473E+01	.42696E+01	.74420E+00	.12835E+01
1.96	.58437	.26069E+01	.16553E+01	.43152E+01	.73954E+00	.12866E+01
1.97	.58258	.26220E+01	.16633E+01	.43610E+01	.73488E+00	.12897E+01
1.98	.58082	.26369E+01	.16713E+01	.44071E+01	.73021E+00	.12928E+01
1.99	.57907	.26518E+01	.16794E+01	.44534E+01	.72555E+00	.12959E+01

(continua)

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{A_1^*}{A_2^*}$	$\frac{a_2}{a_1}$
2.00	.57735	.26667E+01	.16875E+01	.45000E+01	.72087E+00	.12990E+01
2.01	.57565	.26815E+01	.16956E+01	.45468E+01	.71620E+00	.13022E+01
2.02	.57397	.26962E+01	.17038E+01	.45938E+01	.71153E+00	.13053E+01
2.03	.57232	.27108E+01	.17120E+01	.46410E+01	.70685E+00	.13084E+01
2.04	.57068	.27255E+01	.17203E+01	.46885E+01	.70218E+00	.13116E+01
2.05	.56906	.27400E+01	.17285E+01	.47362E+01	.69751E+00	.13147E+01
2.06	.56747	.27545E+01	.17369E+01	.47842E+01	.69284E+00	.13179E+01
2.07	.56589	.27689E+01	.17452E+01	.48324E+01	.68817E+00	.13211E+01
2.08	.56433	.27833E+01	.17536E+01	.48808E+01	.68351E+00	.13242E+01
2.09	.56280	.27976E+01	.17620E+01	.49294E+01	.67886E+00	.13274E+01
2.10	.56128	.28119E+01	.17704E+01	.49783E+01	.67420E+00	.13306E+01
2.11	.55978	.28261E+01	.17789E+01	.50274E+01	.66956E+00	.13338E+01
2.12	.55829	.28402E+01	.17875E+01	.50768E+01	.66492E+00	.13370E+01
2.13	.55683	.28543E+01	.17960E+01	.51264E+01	.66029E+00	.13402E+01
2.14	.55538	.28683E+01	.18046E+01	.51762E+01	.65567E+00	.13434E+01
2.15	.55395	.28823E+01	.18132E+01	.52262E+01	.65105E+00	.13466E+01
2.16	.55254	.28962E+01	.18219E+01	.52765E+01	.64645E+00	.13498E+01
2.17	.55115	.29100E+01	.18306E+01	.53270E+01	.64185E+00	.13530E+01
2.18	.54977	.29238E+01	.18393E+01	.53778E+01	.63727E+00	.13562E+01
2.19	.54840	.29376E+01	.18481E+01	.54288E+01	.63270E+00	.13594E+01
2.20	.54706	.29512E+01	.18569E+01	.54800E+01	.62814E+00	.13627E+01
2.21	.54572	.29648E+01	.18657E+01	.55314E+01	.62359E+00	.13659E+01
2.22	.54441	.29784E+01	.18746E+01	.55831E+01	.61905E+00	.13691E+01
2.23	.54311	.29918E+01	.18835E+01	.56350E+01	.61453E+00	.13724E+01
2.24	.54182	.30053E+01	.18924E+01	.56872E+01	.61002E+00	.13756E+01
2.25	.54055	.30186E+01	.19014E+01	.57396E+01	.60553E+00	.13789E+01
2.26	.53930	.30319E+01	.19104E+01	.57922E+01	.60105E+00	.13822E+01
2.27	.53805	.30452E+01	.19194E+01	.58450E+01	.59659E+00	.13854E+01
2.28	.53683	.30584E+01	.19285E+01	.58981E+01	.59214E+00	.13887E+01
2.29	.53561	.30715E+01	.19376E+01	.59514E+01	.58771E+00	.13920E+01
2.30	.53441	.30845E+01	.19468E+01	.60050E+01	.58330E+00	.13953E+01
2.31	.53322	.30975E+01	.19560E+01	.60588E+01	.57890E+00	.13986E+01
2.32	.53205	.31105E+01	.19652E+01	.61128E+01	.57452E+00	.14019E+01
2.33	.53089	.31234E+01	.19745E+01	.61670E+01	.57016E+00	.14052E+01
2.34	.52974	.31362E+01	.19838E+01	.62215E+01	.56581E+00	.14085E+01
2.35	.52861	.31490E+01	.19931E+01	.62762E+01	.56149E+00	.14118E+01
2.36	.52749	.31617E+01	.20025E+01	.63312E+01	.55718E+00	.14151E+01
2.37	.52638	.31743E+01	.20119E+01	.63864E+01	.55289E+00	.14184E+01
2.38	.52528	.31869E+01	.20213E+01	.64418E+01	.54862E+00	.14217E+01
2.39	.52419	.31994E+01	.20308E+01	.64974E+01	.54437E+00	.14251E+01
2.40	.52312	.32119E+01	.20403E+01	.65533E+01	.54014E+00	.14284E+01
2.41	.52206	.32243E+01	.20499E+01	.66094E+01	.53594E+00	.14317E+01
2.42	.52100	.32367E+01	.20595E+01	.66658E+01	.53175E+00	.14351E+01
2.43	.51996	.32489E+01	.20691E+01	.67224E+01	.52758E+00	.14384E+01
2.44	.51894	.32612E+01	.20788E+01	.67792E+01	.52344E+00	.14418E+01
2.45	.51792	.32733E+01	.20885E+01	.68362E+01	.51931E+00	.14451E+01
2.46	.51691	.32855E+01	.20982E+01	.68935E+01	.51521E+00	.14485E+01
2.47	.51592	.32975E+01	.21080E+01	.69510E+01	.51113E+00	.14519E+01
2.48	.51493	.33095E+01	.21178E+01	.70088E+01	.50707E+00	.14553E+01
2.49	.51395	.33215E+01	.21276E+01	.70668E+01	.50303E+00	.14586E+01

(continua)

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{A_1^*}{A_2^*}$	$\frac{a_2}{a_1}$
2.50	.51299	.33333E+01	.21375E+01	.71250E+01	.49902E+00	.14620E+01
2.51	.51203	.33452E+01	.21474E+01	.71834E+01	.49502E+00	.14654E+01
2.52	.51109	.33569E+01	.21574E+01	.72421E+01	.49105E+00	.14688E+01
2.53	.51015	.33686E+01	.21674E+01	.73010E+01	.48711E+00	.14722E+01
2.54	.50923	.33803E+01	.21774E+01	.73602E+01	.48318E+00	.14756E+01
2.55	.50831	.33919E+01	.21875E+01	.74196E+01	.47928E+00	.14790E+01
2.56	.50741	.34034E+01	.21976E+01	.74792E+01	.47540E+00	.14824E+01
2.57	.50651	.34149E+01	.22077E+01	.75390E+01	.47155E+00	.14858E+01
2.58	.50562	.34263E+01	.22179E+01	.75991E+01	.46772E+00	.14893E+01
2.59	.50474	.34377E+01	.22281E+01	.76594E+01	.46391E+00	.14927E+01
2.60	.50387	.34490E+01	.22383E+01	.77200E+01	.46012E+00	.14961E+01
2.61	.50301	.34602E+01	.22486E+01	.77808E+01	.45636E+00	.14995E+01
2.62	.50216	.34714E+01	.22590E+01	.78418E+01	.45263E+00	.15030E+01
2.63	.50131	.34826E+01	.22693E+01	.79030E+01	.44891E+00	.15064E+01
2.64	.50048	.34936E+01	.22797E+01	.79645E+01	.44522E+00	.15099E+01
2.65	.49965	.35047E+01	.22902E+01	.80262E+01	.44156E+00	.15133E+01
2.66	.49883	.35156E+01	.23006E+01	.80882E+01	.43792E+00	.15168E+01
2.67	.49802	.35266E+01	.23111E+01	.81504E+01	.43430E+00	.15202E+01
2.68	.49722	.35374E+01	.23217E+01	.82128E+01	.43071E+00	.15237E+01
2.69	.49642	.35482E+01	.23323E+01	.82754E+01	.42714E+00	.15272E+01
2.70	.49563	.35590E+01	.23429E+01	.83383E+01	.42359E+00	.15307E+01
2.71	.49485	.35697E+01	.23535E+01	.84014E+01	.42007E+00	.15341E+01
2.72	.49408	.35803E+01	.23642E+01	.84648E+01	.41657E+00	.15376E+01
2.73	.49332	.35909E+01	.23750E+01	.85284E+01	.41310E+00	.15411E+01
2.74	.49256	.36015E+01	.23858E+01	.85922E+01	.40965E+00	.15446E+01
2.75	.49181	.36119E+01	.23966E+01	.86562E+01	.40623E+00	.15481E+01
2.76	.49107	.36224E+01	.24074E+01	.87205E+01	.40283E+00	.15516E+01
2.77	.49033	.36327E+01	.24183E+01	.87850E+01	.39945E+00	.15551E+01
2.78	.48960	.36431E+01	.24292E+01	.88498E+01	.39610E+00	.15586E+01
2.79	.48888	.36533E+01	.24402E+01	.89148E+01	.39277E+00	.15621E+01
2.80	.48817	.36635E+01	.24512E+01	.89800E+01	.38946E+00	.15656E+01
2.81	.48746	.36737E+01	.24622E+01	.90454E+01	.38618E+00	.15691E+01
2.82	.48676	.36838E+01	.24733E+01	.91111E+01	.38293E+00	.15727E+01
2.83	.48606	.36939E+01	.24844E+01	.91770E+01	.37970E+00	.15762E+01
2.84	.48538	.37039E+01	.24955E+01	.92432E+01	.37649E+00	.15797E+01
2.85	.48469	.37138E+01	.25067E+01	.93096E+01	.37330E+00	.15833E+01
2.86	.48402	.37238E+01	.25179E+01	.93762E+01	.37014E+00	.15868E+01
2.87	.48335	.37336E+01	.25292E+01	.94430E+01	.36700E+00	.15903E+01
2.88	.48269	.37434E+01	.25405E+01	.95101E+01	.36389E+00	.15939E+01
2.89	.48203	.37532E+01	.25518E+01	.95774E+01	.36080E+00	.15974E+01
2.90	.48138	.37629E+01	.25632E+01	.96450E+01	.35773E+00	.16010E+01
2.91	.48074	.37725E+01	.25746E+01	.97128E+01	.35469E+00	.16046E+01
2.92	.48010	.37821E+01	.25861E+01	.97808E+01	.35167E+00	.16081E+01
2.93	.47946	.37917E+01	.25975E+01	.98490E+01	.34867E+00	.16117E+01
2.94	.47884	.38012E+01	.26091E+01	.99175E+01	.34570E+00	.16153E+01
2.95	.47822	.38106E+01	.26206E+01	.99862E+01	.34275E+00	.16188E+01
2.96	.47760	.38200E+01	.26322E+01	.10055E+02	.33982E+00	.16224E+01
2.97	.47699	.38294E+01	.26439E+01	.10124E+02	.33692E+00	.16260E+01
2.98	.47638	.38387E+01	.26555E+01	.10194E+02	.33404E+00	.16296E+01
2.99	.47579	.38479E+01	.26673E+01	.10263E+02	.33118E+00	.16332E+01

(continua)

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{A_1^*}{A_2^*}$	$\frac{a_2}{a_1}$
3.00	.47519	.38571E+01	.26790E+01	.10333E+02	.32834E+00	.16368E+01
3.05	.47230	.39025E+01	.27383E+01	.10686E+02	.31450E+00	.16548E+01
3.10	.46953	.39466E+01	.27986E+01	.11045E+02	.30121E+00	.16729E+01
3.15	.46689	.39896E+01	.28598E+01	.11410E+02	.28846E+00	.16911E+01
3.20	.46435	.40315E+01	.29220E+01	.11780E+02	.27623E+00	.17094E+01
3.25	.46192	.40723E+01	.29851E+01	.12156E+02	.26451E+00	.17277E+01
3.30	.45959	.41120E+01	.30492E+01	.12538E+02	.25328E+00	.17462E+01
3.35	.45735	.41507E+01	.31142E+01	.12926E+02	.24252E+00	.17647E+01
3.40	.45520	.41884E+01	.31802E+01	.13320E+02	.23223E+00	.17833E+01
3.45	.45314	.42251E+01	.32471E+01	.13720E+02	.22237E+00	.18020E+01
3.50	.45115	.42609E+01	.33150E+01	.14125E+02	.21295E+00	.18207E+01
3.55	.44925	.42957E+01	.33839E+01	.14536E+02	.20393E+00	.18395E+01
3.60	.44741	.43296E+01	.34537E+01	.14953E+02	.19531E+00	.18584E+01
3.65	.44565	.43627E+01	.35245E+01	.15376E+02	.18707E+00	.18774E+01
3.70	.44395	.43949E+01	.35962E+01	.15805E+02	.17919E+00	.18964E+01
3.75	.44231	.44262E+01	.36689E+01	.16240E+02	.17167E+00	.19154E+01
3.80	.44073	.44568E+01	.37426E+01	.16680E+02	.16447E+00	.19346E+01
3.85	.43921	.44866E+01	.38172E+01	.17126E+02	.15760E+00	.19538E+01
3.90	.43774	.45156E+01	.38928E+01	.17578E+02	.15103E+00	.19730E+01
3.95	.43633	.45439E+01	.39694E+01	.18036E+02	.14475E+00	.19923E+01
4.00	.43496	.45714E+01	.40469E+01	.18500E+02	.13876E+00	.20117E+01
4.05	.43364	.45983E+01	.41253E+01	.18970E+02	.13303E+00	.20311E+01
4.10	.43236	.46245E+01	.42048E+01	.19445E+02	.12756E+00	.20506E+01
4.15	.43113	.46500E+01	.42852E+01	.19926E+02	.12233E+00	.20701E+01
4.20	.42994	.46749E+01	.43666E+01	.20413E+02	.11733E+00	.20896E+01
4.25	.42878	.46992E+01	.44489E+01	.20906E+02	.11256E+00	.21092E+01
4.30	.42767	.47229E+01	.45322E+01	.21405E+02	.10800E+00	.21289E+01
4.35	.42659	.47459E+01	.46165E+01	.21910E+02	.10364E+00	.21486E+01
4.40	.42554	.47685E+01	.47017E+01	.22420E+02	.99481E-01	.21683E+01
4.45	.42453	.47904E+01	.47879E+01	.22936E+02	.95501E-01	.21881E+01
4.50	.42355	.48119E+01	.48751E+01	.23458E+02	.91698E-01	.22080E+01
4.55	.42260	.48328E+01	.49632E+01	.23986E+02	.88062E-01	.22278E+01
4.60	.42168	.48532E+01	.50523E+01	.24520E+02	.84587E-01	.22477E+01
4.65	.42079	.48731E+01	.51424E+01	.25060E+02	.81263E-01	.22677E+01
4.70	.41992	.48926E+01	.52334E+01	.25605E+02	.78086E-01	.22877E+01
4.75	.41908	.49116E+01	.53254E+01	.26156E+02	.75047E-01	.23077E+01
4.80	.41826	.49301E+01	.54184E+01	.26713E+02	.72140E-01	.23277E+01
4.85	.41747	.49482E+01	.55124E+01	.27276E+02	.69359E-01	.23478E+01
4.90	.41670	.49659E+01	.56073E+01	.27845E+02	.66699E-01	.23680E+01
4.95	.41595	.49831E+01	.57032E+01	.28420E+02	.64153E-01	.23881E+01
5.00	.41523	.50000E+01	.58000E+01	.29000E+02	.61716E-01	.24083E+01
5.10	.41384	.50326E+01	.59966E+01	.30178E+02	.57151E-01	.24488E+01
5.20	.41252	.50637E+01	.61971E+01	.31380E+02	.52966E-01	.24894E+01
5.30	.41127	.50934E+01	.64014E+01	.32605E+02	.49126E-01	.25301E+01
5.40	.41009	.51218E+01	.66097E+01	.33853E+02	.45601E-01	.25709E+01
5.50	.40897	.51489E+01	.68218E+01	.35125E+02	.42361E-01	.26119E+01
5.60	.40791	.51749E+01	.70378E+01	.36420E+02	.39383E-01	.26529E+01
5.70	.40690	.51998E+01	.72577E+01	.37738E+02	.36643E-01	.26940E+01
5.80	.40594	.52236E+01	.74814E+01	.39080E+02	.34120E-01	.27352E+01
5.90	.40503	.52464E+01	.77091E+01	.40445E+02	.31795E-01	.27765E+01

Urto Normale, $\gamma = 1.4$

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{A_1^*}{A_2^*}$	$\frac{a_2}{a_1}$
6.00	.40416	.52683E+01	.79406E+01	.41833E+02	.29651E-01	.28179E+01
6.10	.40333	.52893E+01	.81760E+01	.43245E+02	.27672E-01	.28594E+01
6.20	.40254	.53094E+01	.84153E+01	.44680E+02	.25845E-01	.29009E+01
6.30	.40179	.53287E+01	.86584E+01	.46138E+02	.24156E-01	.29425E+01
6.40	.40107	.53473E+01	.89055E+01	.47620E+02	.22594E-01	.29842E+01
6.50	.40038	.53651E+01	.91564E+01	.49125E+02	.21148E-01	.30260E+01
6.60	.39972	.53822E+01	.94113E+01	.50653E+02	.19808E-01	.30678E+01
6.70	.39909	.53987E+01	.96700E+01	.52205E+02	.18566E-01	.31097E+01
6.80	.39849	.54145E+01	.99325E+01	.53780E+02	.17414E-01	.31516E+01
6.90	.39791	.54298E+01	.10199E+02	.55378E+02	.16345E-01	.31936E+01
7.00	.39736	.54444E+01	.10469E+02	.57000E+02	.15351E-01	.32356E+01
7.10	.39683	.54586E+01	.10744E+02	.58645E+02	.14428E-01	.32777E+01
7.20	.39632	.54722E+01	.11022E+02	.60313E+02	.13569E-01	.33199E+01
7.30	.39583	.54853E+01	.11304E+02	.62005E+02	.12769E-01	.33621E+01
7.40	.39536	.54980E+01	.11590E+02	.63720E+02	.12023E-01	.34044E+01
7.50	.39491	.55102E+01	.11879E+02	.65458E+02	.11329E-01	.34467E+01
7.60	.39447	.55220E+01	.12173E+02	.67220E+02	.10680E-01	.34890E+01
7.70	.39405	.55334E+01	.12471E+02	.69005E+02	.10075E-01	.35314E+01
7.80	.39365	.55444E+01	.12772E+02	.70813E+02	.95102E-02	.35738E+01
7.90	.39326	.55550E+01	.13077E+02	.72645E+02	.89819E-02	.36163E+01
8.00	.39289	.55652E+01	.13387E+02	.74500E+02	.84878E-02	.36588E+01
8.10	.39253	.55751E+01	.13700E+02	.76378E+02	.80254E-02	.37013E+01
8.20	.39218	.55847E+01	.14017E+02	.78280E+02	.75924E-02	.37439E+01
8.30	.39185	.55940E+01	.14338E+02	.80205E+02	.71866E-02	.37865E+01
8.40	.39152	.56030E+01	.14662E+02	.82153E+02	.68061E-02	.38292E+01
8.50	.39121	.56117E+01	.14991E+02	.84125E+02	.64492E-02	.38718E+01
8.60	.39091	.56201E+01	.15324E+02	.86120E+02	.61141E-02	.39145E+01
8.70	.39062	.56282E+01	.15660E+02	.88138E+02	.57994E-02	.39573E+01
8.80	.39034	.56361E+01	.16000E+02	.90180E+02	.55036E-02	.40001E+01
8.90	.39006	.56437E+01	.16345E+02	.92245E+02	.52255E-02	.40429E+01
9.00	.38980	.56512E+01	.16693E+02	.94333E+02	.49639E-02	.40857E+01
9.10	.38954	.56584E+01	.17045E+02	.96445E+02	.47175E-02	.41285E+01
9.20	.38930	.56653E+01	.17401E+02	.98580E+02	.44855E-02	.41714E+01
9.30	.38906	.56721E+01	.17760E+02	.10074E+03	.42669E-02	.42143E+01
9.40	.38883	.56787E+01	.18124E+02	.10292E+03	.40608E-02	.42572E+01
9.50	.38860	.56850E+01	.18492E+02	.10513E+03	.38664E-02	.43002E+01
9.60	.38838	.56912E+01	.18863E+02	.10735E+03	.36828E-02	.43431E+01
9.70	.38817	.56972E+01	.19238E+02	.10961E+03	.35095E-02	.43861E+01
9.80	.38797	.57031E+01	.19617E+02	.11188E+03	.33458E-02	.44292E+01
9.90	.38777	.57088E+01	.20001E+02	.11418E+03	.31911E-02	.44722E+01
10.00	.38758	.57143E+01	.20388E+02	.11650E+03	.30447E-02	.45153E+01
11.00	.38592	.57619E+01	.24471E+02	.14100E+03	.19451E-02	.49468E+01
12.00	.38466	.57987E+01	.28943E+02	.16783E+03	.12866E-02	.53799E+01
13.00	.38368	.58276E+01	.33805E+02	.19700E+03	.87709E-03	.58142E+01
14.00	.38289	.58507E+01	.39055E+02	.22850E+03	.61379E-03	.62494E+01
15.00	.38226	.58696E+01	.44694E+02	.26233E+03	.43953E-03	.66853E+01
16.00	.38174	.58851E+01	.50722E+02	.29850E+03	.32119E-03	.71219E+01
17.00	.38131	.58980E+01	.57138E+02	.33700E+03	.23899E-03	.75590E+01
18.00	.38095	.59088E+01	.63944E+02	.37783E+03	.18072E-03	.79965E+01
19.00	.38065	.59180E+01	.71139E+02	.42100E+03	.13865E-03	.84344E+01
20.00	.38039	.59259E+01	.78722E+02	.46650E+03	.10777E-03	.88725E+01
∞	.37796	.60000E+01	∞	∞	.00000E-00	∞

TABELLA 6.3
FLUSSI COMPRIMIBILI DI ESPANSIONE:
FUNZIONE DI PRANDTL-MAYER E ANGOLO DI MACH

<i>M</i>	<i>v</i>	μ	<i>M</i>	<i>v</i>	μ
0.1000+01	0.0000	0.9000+02	0.1640+01	0.1604+02	0.3757+02
0.1020+01	0.1257+00	0.7864+02	0.1660+01	0.1663+02	0.3704+02
0.1040+01	0.3510+00	0.7406+02	0.1680+01	0.1722+02	0.3653+02
0.1060+01	0.6367+00	0.7063+02	0.1700+01	0.1781+02	0.3603+02
0.1080+01	0.9680+00	0.6781+02	0.1720+01	0.1840+02	0.3555+02
0.1100+01	0.1336+01	0.6538+02	0.1740+01	0.1898+02	0.3508+02
0.1120+01	0.1735+01	0.6323+02	0.1760+01	0.1956+02	0.3462+02
0.1140+01	0.2160+01	0.6131+02	0.1780+01	0.2015+02	0.3418+02
0.1160+01	0.2607+01	0.5955+02	0.1800+01	0.2073+02	0.3375+02
0.1180+01	0.3074+01	0.5794+02	0.1820+01	0.2130+02	0.3333+02
0.1200+01	0.3558+01	0.5644+02	0.1840+01	0.2188+02	0.3292+02
0.1220+01	0.4057+01	0.5505+02	0.1860+01	0.2245+02	0.3252+02
0.1240+01	0.4569+01	0.5375+02	0.1880+01	0.2302+02	0.3213+02
0.1260+01	0.5093+01	0.5253+02	0.1900+01	0.2359+02	0.3176+02
0.1280+01	0.5627+01	0.5138+02	0.1920+01	0.2415+02	0.3139+02
0.1300+01	0.6170+01	0.5028+02	0.1940+01	0.2471+02	0.3103+02
0.1320+01	0.6721+01	0.4925+02	0.1960+01	0.2527+02	0.3068+02
0.1340+01	0.7279+01	0.4827+02	0.1980+01	0.2583+02	0.3033+02
0.1360+01	0.7844+01	0.4733+02	0.2000+01	0.2638+02	0.3000+02
0.1380+01	0.8413+01	0.4644+02	0.2050+01	0.2775+02	0.2920+02
0.1400+01	0.8987+01	0.4558+02	0.2100+01	0.2910+02	0.2844+02
0.1420+01	0.9565+01	0.4477+02	0.2150+01	0.3043+02	0.2772+02
0.1440+01	0.1015+02	0.4398+02	0.2200+01	0.3173+02	0.2704+02
0.1460+01	0.1073+02	0.4323+02	0.2250+01	0.3302+02	0.2639+02
0.1480+01	0.1132+02	0.4251+02	0.2300+01	0.3428+02	0.2577+02
0.1500+01	0.1191+02	0.4181+02	0.2350+01	0.3553+02	0.2518+02
0.1520+01	0.1249+02	0.4114+02	0.2400+01	0.3675+02	0.2462+02
0.1540+01	0.1309+02	0.4049+02	0.2450+01	0.3795+02	0.2409+02
0.1560+01	0.1368+02	0.3987+02	0.2500+01	0.3912+02	0.2358+02
0.1580+01	0.1427+02	0.3927+02	0.2550+01	0.4028+02	0.2309+02
0.1600+01	0.1486+02	0.3868+02	0.2600+01	0.4141+02	0.2262+02
0.1620+01	0.1545+02	0.3812+02	0.2650+01	0.4253+02	0.2217+02

(continua)

<i>M</i>	<i>v</i>	μ	<i>M</i>	<i>v</i>	μ
0.2700+01	0.4362+02	0.2174+02	0.5600+01	0.8203+02	0.1029+02
0.2750+01	0.4469+02	0.2132+02	0.5700+01	0.8280+02	0.1010+02
0.2800+01	0.4575+02	0.2092+02	0.5800+01	0.8354+02	0.9928+01
0.2850+01	0.4678+02	0.2054+02	0.5900+01	0.8426+02	0.9758+01
0.2900+01	0.4779+02	0.2017+02	0.6000+01	0.8496+02	0.9594+01
0.2950+01	0.4878+02	0.1981+02	0.6100+01	0.8563+02	0.9435+01
0.3000+01	0.4976+02	0.1947+02	0.6200+01	0.8629+02	0.9282+01
0.3050+01	0.5071+02	0.1914+02	0.6300+01	0.8694+02	0.9133+01
0.3100+01	0.5165+02	0.1882+02	0.6400+01	0.8756+02	0.8989+01
0.3150+01	0.5257+02	0.1851+02	0.6500+01	0.8817+02	0.8850+01
0.3200+01	0.5347+02	0.1821+02	0.6600+01	0.8876+02	0.8715+01
0.3250+01	0.5435+02	0.1792+02	0.6700+01	0.8933+02	0.8584+01
0.3300+01	0.5522+02	0.1764+02	0.6800+01	0.8989+02	0.8457+01
0.3350+01	0.5607+02	0.1737+02	0.6900+01	0.9044+02	0.8333+01
0.3400+01	0.5691+02	0.1710+02	0.7000+01	0.9097+02	0.8213+01
0.3450+01	0.5773+02	0.1685+02	0.7100+01	0.9149+02	0.8097+01
0.3500+01	0.5853+02	0.1660+02	0.7200+01	0.9200+02	0.7984+01
0.3550+01	0.5932+02	0.1636+02	0.7300+01	0.9249+02	0.7873+01
0.3600+01	0.6009+02	0.1613+02	0.7400+01	0.9297+02	0.7766+01
0.3650+01	0.6085+02	0.1590+02	0.7500+01	0.9344+02	0.7662+01
0.3700+01	0.6160+02	0.1568+02	0.7600+01	0.9390+02	0.7561+01
0.3750+01	0.6233+02	0.1547+02	0.7700+01	0.9434+02	0.7462+01
0.3800+01	0.6304+02	0.1526+02	0.7800+01	0.9478+02	0.7366+01
0.3850+01	0.6375+02	0.1505+02	0.7900+01	0.9521+02	0.7272+01
0.3900+01	0.6444+02	0.1486+02	0.8000+01	0.9562+02	0.7181+01
0.3950+01	0.6512+02	0.1466+02	0.9000+01	0.9932+02	0.6379+01
0.4000+01	0.6578+02	0.1448+02	0.1000+02	0.1023+03	0.5739+01
0.4050+01	0.6644+02	0.1429+02	0.1100+02	0.1048+03	0.5216+01
0.4100+01	0.6708+02	0.1412+02	0.1200+02	0.1069+03	0.4780+01
0.4150+01	0.6771+02	0.1394+02	0.1300+02	0.1087+03	0.4412+01
0.4200+01	0.6833+02	0.1377+02	0.1400+02	0.1102+03	0.4096+01
0.4250+01	0.6894+02	0.1361+02	0.1500+02	0.1115+03	0.3823+01
0.4300+01	0.6954+02	0.1345+02	0.1600+02	0.1127+03	0.3583+01
0.4350+01	0.7013+02	0.1329+02	0.1700+02	0.1137+03	0.3372+01
0.4400+01	0.7071+02	0.1314+02	0.1800+02	0.1146+03	0.3185+01
0.4450+01	0.7127+02	0.1299+02	0.1900+02	0.1155+03	0.3017+01
0.4500+01	0.7183+02	0.1284+02	0.2000+02	0.1162+03	0.2866+01
0.4550+01	0.7238+02	0.1270+02	0.2200+02	0.1175+03	0.2605+01
0.4600+01	0.7292+02	0.1256+02	0.2400+02	0.1186+03	0.2388+01
0.4650+01	0.7345+02	0.1242+02	0.2600+02	0.1195+03	0.2204+01
0.4700+01	0.7397+02	0.1228+02	0.2800+02	0.1202+03	0.2047+01
0.4750+01	0.7448+02	0.1215+02	0.3000+02	0.1209+03	0.1910+01
0.4800+01	0.7499+02	0.1202+02	0.3200+02	0.1215+03	0.1791+01
0.4850+01	0.7548+02	0.1190+02	0.3400+02	0.1220+03	0.1685+01
0.4900+01	0.7597+02	0.1178+02	0.3600+02	0.1225+03	0.1592+01
0.4950+01	0.7645+02	0.1166+02	0.3800+02	0.1229+03	0.1508+01
0.5000+01	0.7692+02	0.1154+02	0.4000+02	0.1233+03	0.1433+01
0.5100+01	0.7784+02	0.1131+02	0.4200+02	0.1236+03	0.1364+01
0.5200+01	0.7873+02	0.1109+02	0.4400+02	0.1239+03	0.1302+01
0.5300+01	0.7960+02	0.1088+02	0.4600+02	0.1242+03	0.1246+01
0.5400+01	0.8043+02	0.1067+02	0.4800+02	0.1245+03	0.1194+01
0.5500+01	0.8124+02	0.1048+02	0.5000+02	0.1247+03	0.1146+01