

Capitolo 7

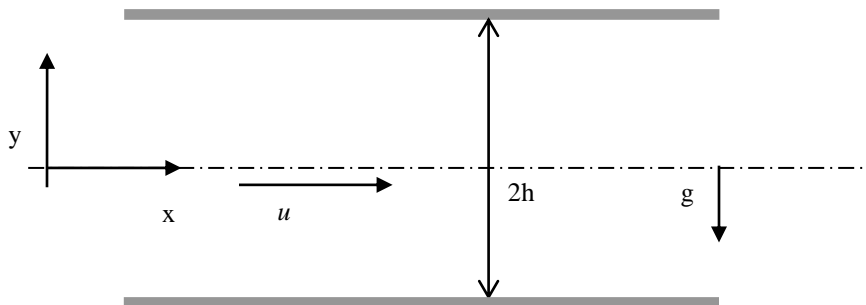
Soluzioni semplici delle equazioni di Navier-Stokes per flussi viscosi incompressibili

Le equazioni di Navier-Stokes (NS) in forma vettoriale per flussi incompressibili ($\rho = \text{cost.}$) di fluidi Newtoniani sono (eq.3.4 e 3.18):

$$\begin{cases} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Il problema principale nella risoluzione delle equazioni di NS sta nella non linearità dei termini convettivi $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ che rendono impossibile la determinazione di soluzioni analitiche. In alcuni casi, i termini non lineari possono essere trascurati e risulta possibile determinare delle soluzioni analitiche esatte. Tale approccio è riferito sempre al caso di flussi laminari in quanto la natura aleatoria delle fluttuazioni di velocità nel caso turbolento, rende in ogni caso impossibile la soluzione analitica.

7.1 Flusso laminare tra lastre piane parallele



Si consideri il flusso tra due lastre parallele a distanza $2h$. Scegliamo il sistema di riferimento come in figura, cioè con l'asse x che passa per l'asse di simmetria del condotto. Il flusso si muove parallelamente alle lastre (da sinistra verso destra) ed ha la sola componente lungo x diversa da zero.

Per la geometria della figura si ha quindi:

$$\bar{u} = (u; v; w) = (u; 0; 0)$$

cioè l'unica componente diversa da 0 è quella parallela alle lastre (asse x). Dalla equazione di continuità si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Essendo le lastre infinite e considerando il flusso stazionario, si avrà che u dipende solo da $y \Rightarrow u = u(y)$. Perciò, essendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

le equazioni di Navier-Stokes scritte per componenti, in questo caso particolare, si semplificano nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (7.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - g\rho \end{array} \right. \quad (7.1b) \quad (7.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} \end{array} \right. \quad (7.1c)$$

avendo considerato come unica forza di massa agente, la forza di gravità.

Dalle relazioni (7.1b) e (7.1c) si può vedere, integrando, come la pressione P può essere espressa nel modo seguente:

$$P(x, y) = -\rho g y + f_1(x) \quad (7.2)$$

dove $f_1(x)$ è una funzione arbitraria di x . Questo significa che, fissato x , la pressione varia idrostaticamente nella direzione y . Dalle relazioni (7.1a) e (7.2), si ha:

$$\frac{d^2 u}{d y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{d f_1}{d x}$$

che può essere facilmente integrata nel modo seguente:

$$\frac{d u}{d y} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) y + c_1 \Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) y^2 + c_1 y + c_2 \quad (7.3)$$

Da notare che nell'integrazione in y , grazie alla relazione (7.2) è stato possibile considerare il termine $\frac{\partial P}{\partial x}$ come una costante. Le costanti c_1 e c_2 possono essere determinate dalle condizioni al contorno che sono:

$$u=0 \quad \text{per } y=\pm h \quad (\text{le due lastre sono fisse})$$

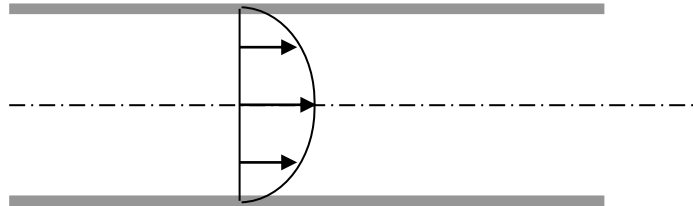
Si ottiene quindi:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) h^2$$

da cui si ottiene finalmente la relazione finale:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) (y^2 - h^2) \quad (7.4)$$

Il profilo di velocità è quindi parabolico in y .



La velocità massima si ha sull'asse di simmetria ed è data dal valore di u per $y=0$ (per come abbiamo scelto il sistema di riferimento). Si ha quindi:

$$u_{\max} = -\frac{h^2}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

La portata in volume tra le due lastre può essere ottenuta come:

$$Q = \int_{-h}^h u dy = \int_{-h}^h \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) (y^2 - h^2) dy \quad \text{da cui}$$

$$Q = -\frac{2h^3}{3\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

Si noti che la portata dipende fortemente dalla distanza tra le lastre (h^3). Si noti inoltre che il termine $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$ è sicuramente negativo perché, per effetto delle perdite, la pressione diminuisce lungo x . Supponendo che $P(x)$ abbia un andamento lineare, la caduta di pressione lungo un tratto di tubo di lunghezza ΔL può essere calcolata dalla relazione:

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{e quindi la portata sarà:}$$

$$Q = \frac{2h^3}{3\mu} \frac{\Delta P}{\Delta L}$$

Applicando la conservazione della massa possiamo determinare la velocità media come rapporto tra la portata e la distanza tra le lastre $2h$:

$$U = \frac{h^2}{3\mu} \frac{\Delta P}{\Delta L}$$

e dalla relazione vista sopra per la velocità massima si ottiene:

$$u_{\max} = \frac{3}{2} U$$

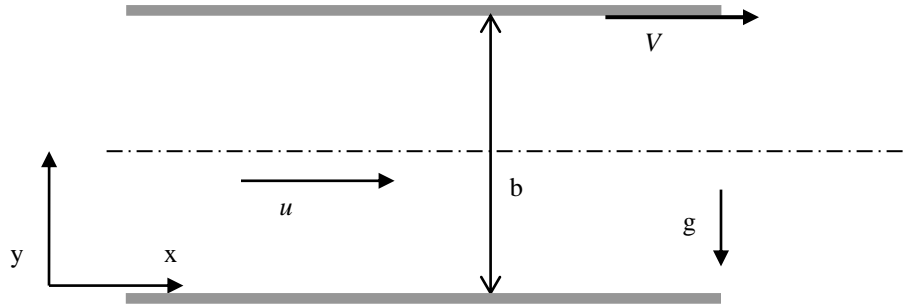
E' ovvio che per rendere i risultati indipendenti dai parametri particolari (gradienti di pressione, distanza tra le lastre, velocità media ecc.) è opportuno scrivere la relazione (7.4) in termini adimensionali. Normalizzando la velocità rispetto a u_{\max} si ottiene:

$$\frac{u(y)}{u_{\max}} = \frac{\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) (y^2 - h^2)}{-\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) h^2} = 1 - \frac{y^2}{h^2} \quad (7.5)$$

Questo risultato ha validità universale per qualsiasi condizione di flusso, l'importante è che le condizioni al contorno e le ipotesi di partenza siano sempre valide. E' chiaro ad esempio, che quanto visto fin'ora vale se il flusso considerato è laminare. Per la geometria considerata, la condizione di laminarità può essere data in termini di numero di Reynolds (Re) definito sulla base della distanza tra le lastre ($2h$). Da analisi sperimentali si ha che la condizione di laminarità è rispettata circa per $Re < 1400$.

7.2 Flusso di Couette

Il flusso di Couette è molto simile al caso del paragrafo precedente. Abbiamo ancora un flusso laminare tra due lastre piane parallele ma l'unica differenza è che ora una delle due lastre si muove parallelamente all'altra con velocità relativa V .



Stavolta, per semplificare i conti, chiamiamo con b la distanza tra le lastre e consideriamo l'origine degli assi in corrispondenza alla lastra inferiore che supponiamo essere ferma. Le equazioni di Navier-Stokes, si semplificano esattamente come nel caso precedente (eq. 7.1 del paragrafo 7.1), che riportiamo di seguito per comodità:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (7.1a) \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - g\rho & (7.1b) \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} & (7.1c) \end{cases} \quad (7.1)$$

Ciò che cambia rispetto al caso precedente sono le condizioni al contorno. Nel caso del flusso di Couette si avrà infatti:

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{per } y &= 0 \\ u &= V & \text{per } y &= b \end{aligned} \quad (7.6)$$

Integrando l'equazione (7.1a) tenendo conto delle considerazioni precedentemente fatte sul gradiente di pressione e tenendo conto delle condizioni al contorno (7.6) si ottiene l'espressione finale della velocità:

$$u(y) = \frac{V}{b}y + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) (y^2 - by) \quad (7.7)$$

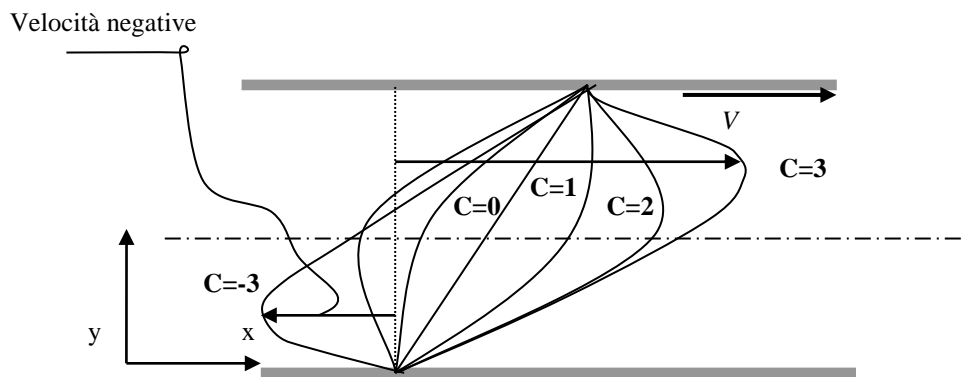
Anche in questo caso possiamo esprimere la velocità in forma adimensionale come segue:

$$\frac{u(y)}{V} = \frac{y}{b} - \frac{b^2}{2\mu V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b} \right) \quad (7.8)$$

Come si vede la velocità adimensionale $\frac{u(y)}{V}$ dipende dalla distanza adimensionale $\frac{y}{b}$ attraverso il parametro adimensionale:

$$C = -\frac{b^2}{2\mu V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

che, tenendo conto ancora una volta che il gradiente di pressione lungo x è negativo, è una costante maggiore di zero. A seconda dei valori di C , potremo avere diversi profili di velocità:



Il caso più semplice è ovviamente quello di $C=0$ che corrisponde a gradiente di pressione nullo. In questo caso semplice, la soluzione (eq. 7.7 o 7.8) diventa:

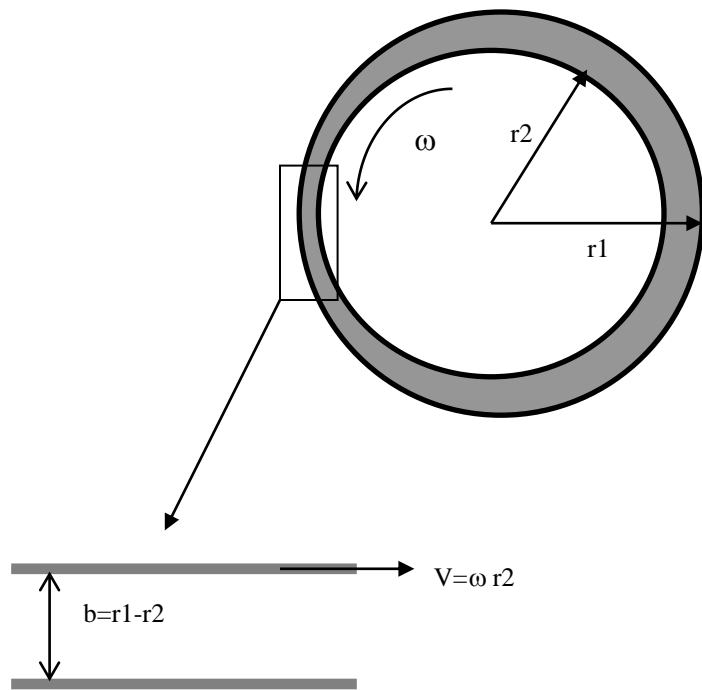
$$u(y) = \frac{V}{b} y$$

in cui, come è ovvio, la velocità varia linearmente con y per effetto della sola viscosità. Si noti che per $C < 0$ si possono avere delle condizioni in cui il moto del fluido è in direzione negativa (il gradiente di pressione positivo con x riesce a vincere l'effetto di trascinamento dovuto alla viscosità).

Un caso reale che può essere approssimato con un flusso di Couette è quello del flusso tra due cilindri concentrici o eccentrici di raggio poco diverso tra loro ed in moto relativo l'uno rispetto all'altro. Questo è un caso pratico ad esempio di lubrificazione tra cuscinetti. Se il meato è molto piccolo rispetto ai raggi ed il fluido è molto viscoso (ad es. olio lubrificante) si possono utilizzare ancora le equazioni del moto di Couette, ponendo

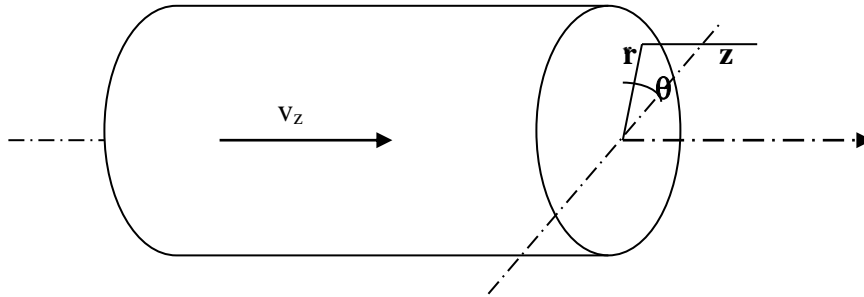
$$V = r_2 \omega \quad \text{e} \quad b = r_1 - r_2$$

Maggiori dettagli su questo aspetto di notevole importanza pratica verranno dati in seguito.



7.3 Flusso di Poiseuille

Consideriamo il moto laminare, assialsimmetrico e stazionario di un fluido attraverso un tubo di sezione circolare costante e di raggio R . Data la geometria del problema, è conveniente utilizzare le coordinate cilindriche (r, θ, z) . Assumiamo che $v_r = v_\theta = 0$ essendo solo v_z la componente di velocità non nulla.



Le equazioni di Navier-Stokes e l'equazioni di continuità, vanno scritte in coordinate cilindriche. Per quanto riguarda la continuità, si ottiene che:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ . Inoltre, per la assialsimmetria e la stazionarietà, si ha:}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0 \text{ .}$$

Questo significa che v_z è solo funzione di r cioè: $v_z = v_z(r)$. Le equazioni di NS scritte in coordinate cilindriche, sono le seguenti (indichiamo con g_r, g_θ, g_z , le componenti del vettore gravità nelle tre direzioni di riferimento):

Lungo r :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r^2}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]$$

Lungo θ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right]$$

Lungo z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

Tenendo conto delle ipotesi fatte, il sistema di equazioni finale (le equivalenti delle 7.1 viste precedentemente) risulta essere:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \end{array} \right. \quad (7.9a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - g \rho \cos \theta \end{array} \right. \quad (7.9b) \quad (7.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} - g \rho \sin \theta \end{array} \right. \quad (7.9c)$$

Integrando le equazioni (7.9b) e (7.9c) si ottiene:

$$P = -\rho g r \sin \theta + f_1(z) \quad \text{oppure} \quad P = -\rho g y + f_1(z)$$

che indica come, per z fissato, la pressione sia distribuita idrostaticamente lungo y (direzione verticale) e che $\frac{\partial P}{\partial z}$ non dipende da r e θ . Tenendo conto di tutto ciò, l'equazione (7.9c) può essere integrata nel modo seguente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} r^2 + C_1 \Rightarrow$$

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Da risolvere con le condizioni al contorno che sono le seguenti:

- Per $r=0$ (sull'asse z) si deve avere velocità finita. L'unico modo perché ciò sia possibile è che $C_1=0$.
- Alla parete ($r=R$) la velocità deve essere nulla, per cui:

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} R^2$$

La relazione finale è quindi:

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (r^2 - R^2) \quad (7.10)$$

In ogni sezione trasversale, il profilo è quindi parabolico. Per ottenere la portata in volume Q , occorre integrare v_z :

$$Q = \int_0^R v_z(r) 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (r^2 - R^2) r dr$$

da cui si ottiene:

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (7.11)$$

Si noti che, come al solito, la portata è positiva perché $\frac{\partial P}{\partial z} < 0$. Inoltre è interessante notare la forte dipendenza di Q da R (R^4). Considerando le cadute di pressione lineari lungo x , possiamo esprimere il gradiente di pressione lungo una distanza ΔL nel modo seguente:

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (7.12)$$

e quindi ottenere quella che generalmente si chiama legge di Hagen-Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta P}{\Delta L} \quad (7.13)$$

La velocità media può essere determinata semplicemente dividendo la portata per l'area:

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu} \frac{DP}{DL} \quad (7.14)$$

La velocità massima si ottiene invece sull'asse del tubo ($r=0$) e quindi sarà:

$$v_{z\max} = \frac{R^2}{4\mu} \frac{DP}{DL} = 2 U \quad (7.15)$$

In forma adimensionale, possiamo normalizzare la velocità v_z rispetto a $v_{z\max}$, ottenendo:

$$\frac{v_z(r)}{v_{z\max}} = 1 - \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \quad (7.16)$$

Da questa espressione sono scomparsi quindi i termini di viscosità e gradiente di pressione.

Il gradiente di pressione dà una misura della resistenza al moto del fluido. Una misura di tale resistenza è data da un parametro adimensionale, detto *coefficiente (o indice) di resistenza* che viene definito nel modo seguente:

$$\lambda = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)}{\rho \frac{U^2}{2}} 2R \quad (7.17)$$

che, tenendo conto delle (7.14) e (7.12) dà:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (7.18)$$

essendo Re definito sulla base della velocità media e del diametro. Il coefficiente λ viene anche detto **coefficiente di Fanning** e dà una stima adimensionale delle perdite di carico dovute all'attrito.

Come visto in precedenza, queste considerazioni valgono se il flusso è laminare. Attraverso analisi sperimentali, si ottiene che il limite in termini di Re (lunghezza caratteristica il diametro) è di circa 2100. Questo significa che oltre questo limite, dopo una fase di transizione, la legge (7.18) non è più valida.

Sulla base di dati sperimentali relativi a tubi lisci in condizioni turbolente, Blasius ha ottenuto la seguente formula (è un fit di dati sperimentali e non una formula ricavata da modelli matematici):

$$\lambda = 0.3164 \cdot \text{Re}^{-0.25} \quad (7.19)$$

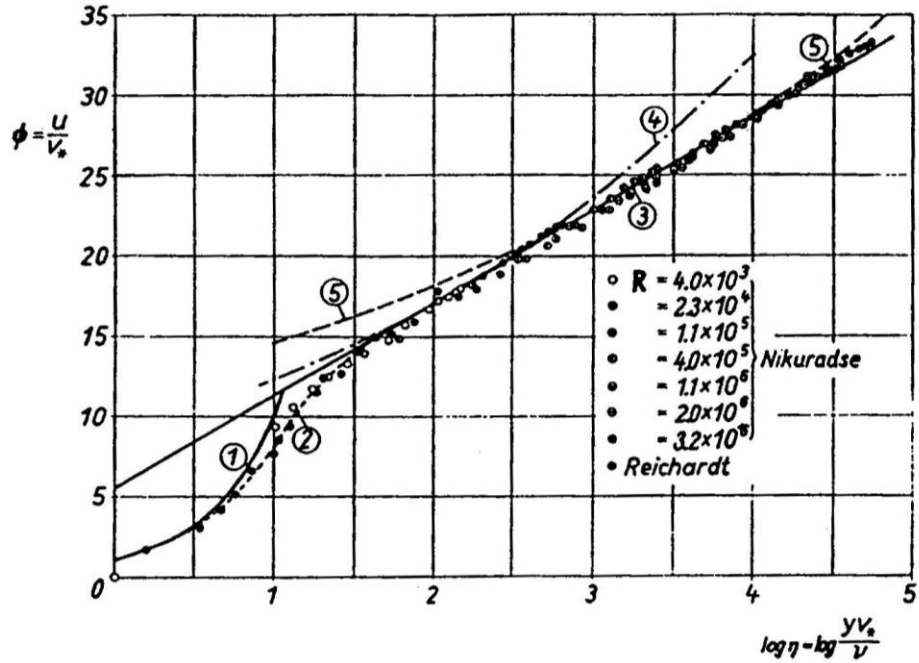
Questa formula è stata ricavata da Blasius agli inizi del '900, e non c'erano a disposizione molti dati a numeri di Re elevati. Infatti la relazione (7.19) si vede che è in buon accordo con i dati sperimentali per $\text{Re} < 100000$.

Successivamente, gli studi compiuti sullo strato limite turbolento, portarono alla formulazione di teorie che danno (ancora oggi) delle predizioni molto accurate sul profilo di velocità. In particolare, si è osservato che nella regione molto vicino alla parete, la velocità (u) varia linearmente con la distanza dalla parete (y) mentre per distanze maggiori (ma sempre dentro lo strato limite) tale relazione diventa di tipo logaritmico. La cosiddetta legge di parete per strato limite turbolento, può essere data come segue:

$$\begin{aligned} u^+ &= y^+ && \text{molto vicino alla parete} \\ u^+ &= A \log y^+ + B && \text{più lontano dalla parete (ma sempre dentro lo strato limite)} \end{aligned}$$

avendo indicato con l'apice + le quantità adimensionalizzate rispetto alle variabili di parete (velocità di parete $u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}$, lunghezza caratteristica $l = \nu / u_\tau$) ed essendo A e B due costanti da determinare con dati sperimentali.

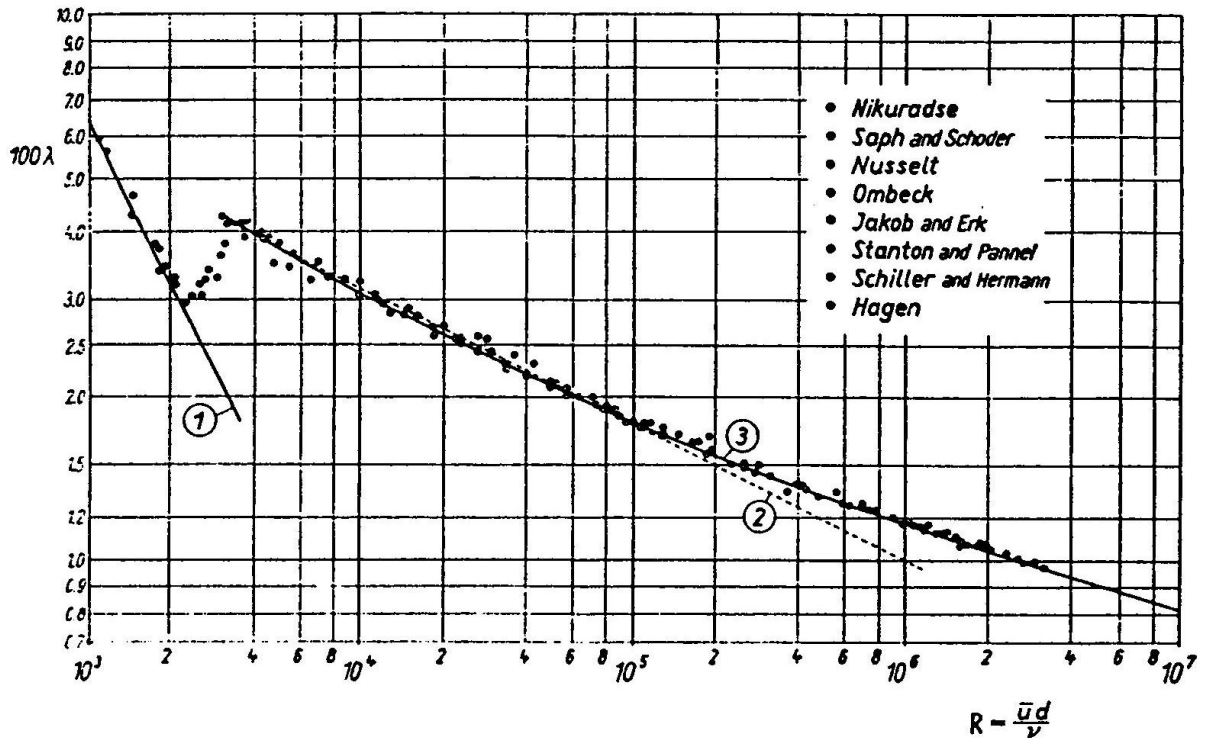
- (1) $\phi = \eta$ laminar;
- (2) transition from laminar to turbulent; after Reichardt [55]
- (3) eqn. (20.14), turbulent, all Reynolds numbers;
- (4) eqn. (20.11), turbulent, $R < 10^5$;
- (5) $\phi = 11.5 \eta^{1/4}$



Sulla base di questi risultati, è stato possibile ottenere una formula analitica di validità più generale rispetto alla (7.19), e cioè:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log (\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0.8 \tag{7.20}$$

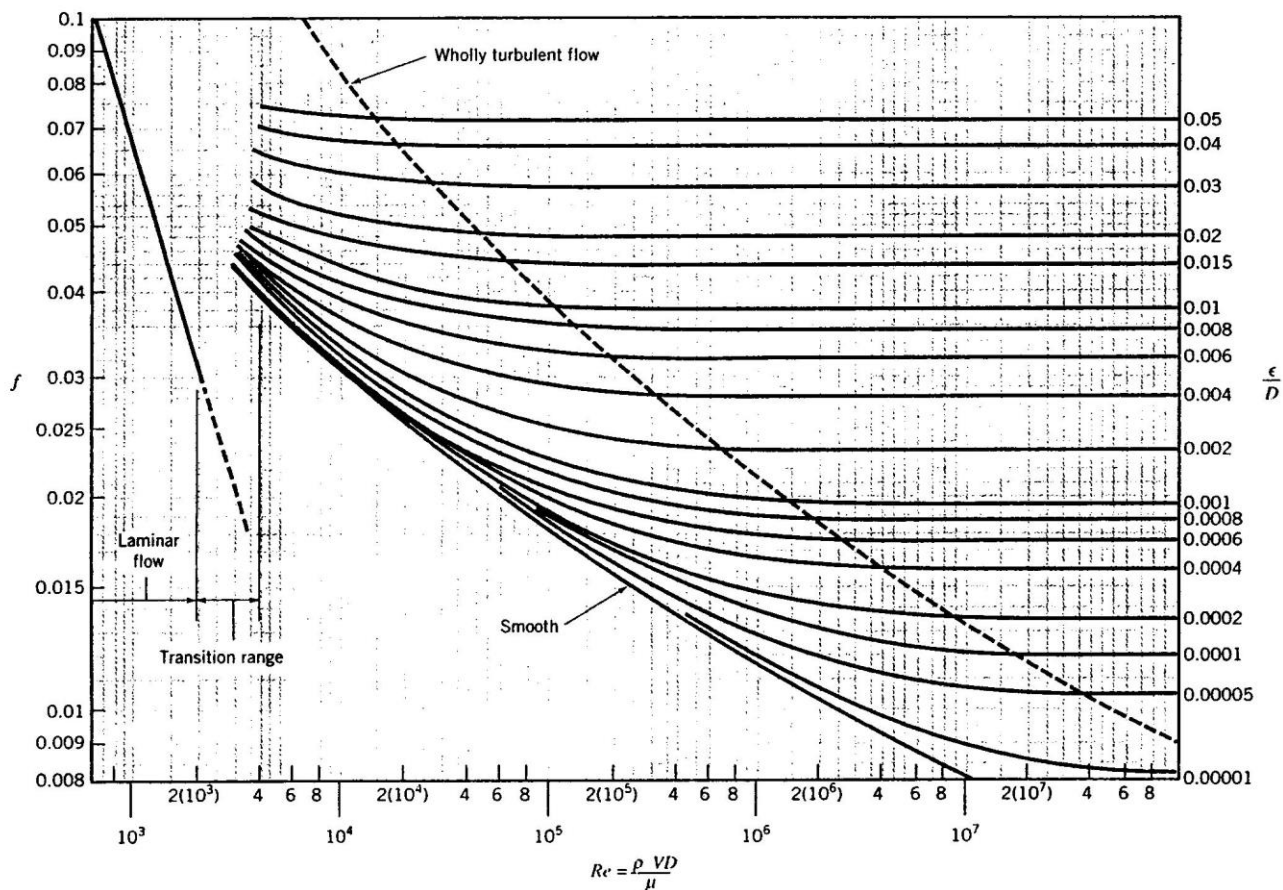
Questa è detta legge universale di Prandtl che va bene per qualsiasi numero di Re sempre per tubi lisci turbolenti.



Da notare che la formula (7.20) va risolta con un metodo iterativo (tipo metodo di Newton). Tutto ciò visto fin'ora vale, come abbiamo detto, per tubi lisci. Nel caso di tubi rugosi introduciamo un nuovo parametro, ε , che dà un'indicazione della dimensione media della rugosità su una parete. Ad esempio:

Materiale	ε (mm)
Plastica, vetro	0
Acciaio commerciale	0.045
Legno	0.18-1.9

Sulla base dei dati sperimentali, è stato possibile ottenere un diagramma generale che dà $\lambda(Re)$ con ε/D a parametro (cosiddetta carta di Moody o Arpa di Nikuradse):



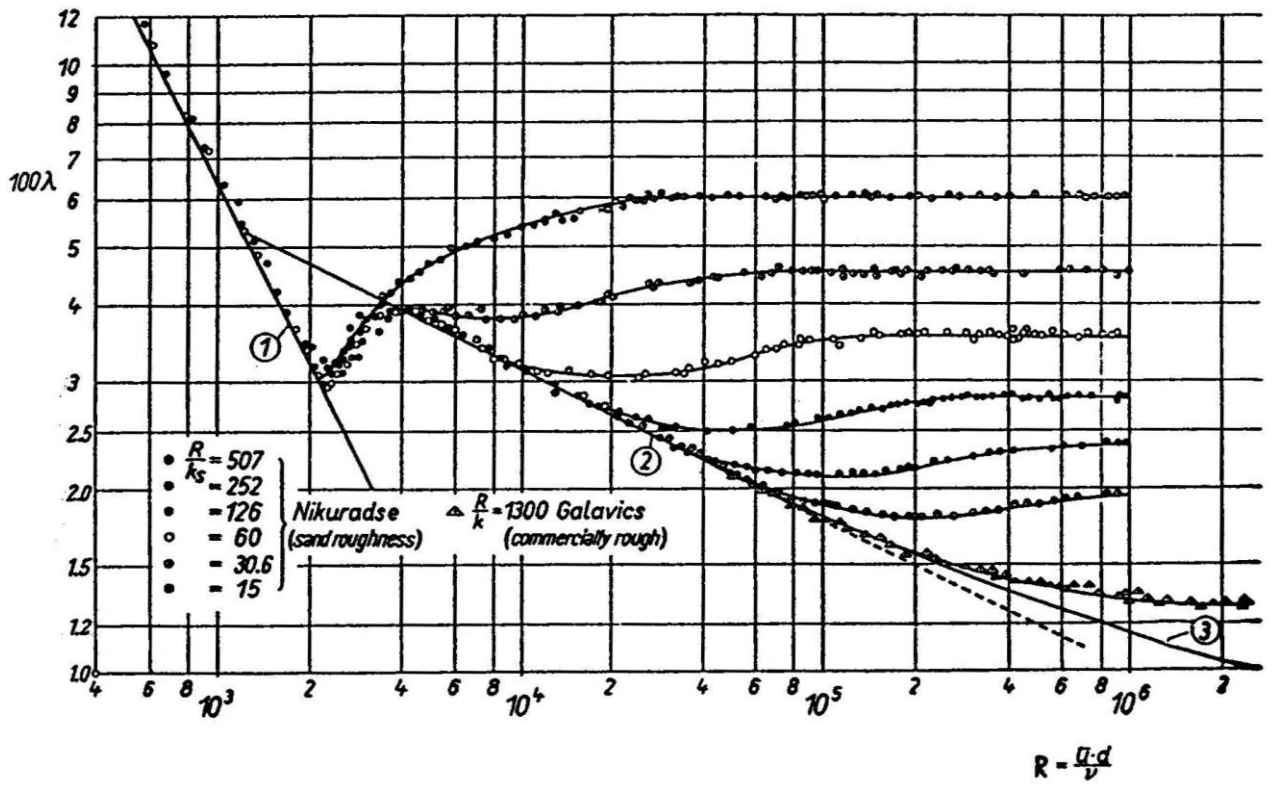
Da notare che per flussi laminari, la rugosità non ha effetto mentre diventa importante per flussi turbolenti e soprattutto ad elevati Re. Questo è ovviamente legato alle dimensioni dello strato limite turbolento che, al crescere del Re, diventa sempre più sottile fino a diventare dello stesso ordine o più piccolo della dimensione ϵ .

Sulla base dei dati sperimentali per tubi lisci e rugosi, è stato possibile ottenere una formula di validità ancora più generale della legge universale di Prandtl (7.20), che fornisce la relazione $f(Re, \lambda, \epsilon/D)$ ed è detta fit di Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (7.21)$$

Anche questa relazione può essere risolta utilizzando un metodo iterativo.

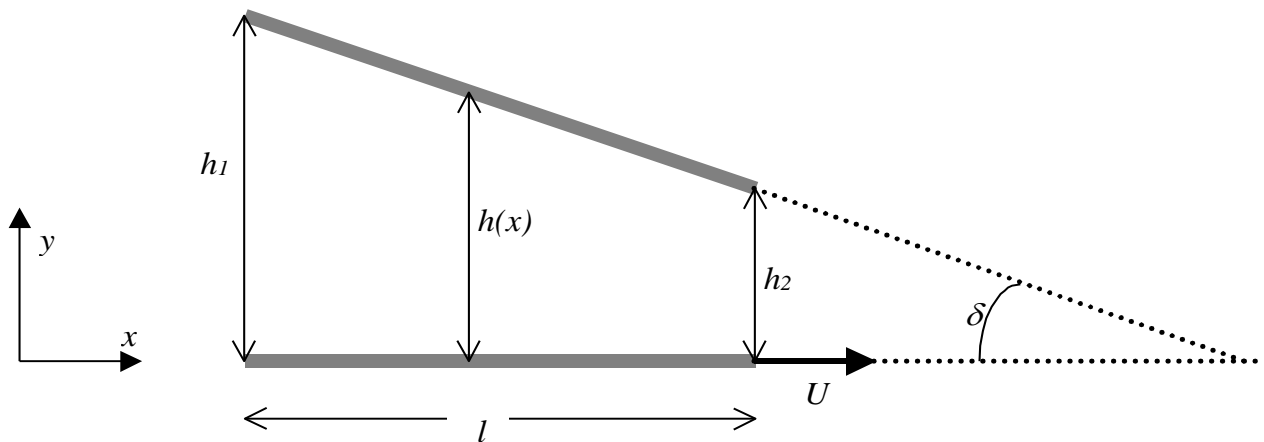
	Prandtl, eqn.	Blasius, eqn.
$R = \frac{\bar{u} d}{\nu}$	λ	λ
10^3	(0.0622)	(0.0567)
$2 \cdot 10^3$	(0.0494)	(0.0473)
$5 \cdot 10^3$	0.0374	0.0376
10^4	0.0309	0.0316
$2 \cdot 10^4$	0.0259	0.0266
$5 \cdot 10^4$	0.0209	0.0212
10^5	0.0180	0.0178
$2 \cdot 10^5$	0.0156	0.0150
$5 \cdot 10^5$	0.0131	—
10^6	0.0116	(0.0100)
$2 \cdot 10^6$	0.0104	—
$5 \cdot 10^6$	0.0090	—
10^7	0.0081	(0.0056)



7.4 Teoria della lubrificazione (*leggere*)

Il flusso di Couette, studiato nel par. 7.2, può essere esteso al caso più generale di un meato con facce non parallele riempito di olio lubrificante (ad esempio per studiare e dimensionare dei cuscinetti). Come vedremo infatti, nella zona tra il cuscinetto e l'albero rotante si generano delle pressioni molto elevate (anche 3 o 4 atmosfere) che danno un effetto di portanza che impedisce alle parti metalliche di venire a contatto. Questo effetto è possibile solo se il meato è a sezione non costante.

Consideriamo il caso di un blocco inclinato in moto relativo rispetto ad una superficie piana:



La superficie è in moto con velocità U parallela all'asse x e la dimensione trasversale (z) la consideriamo infinitamente lunga così il problema diventa 2D. L'angolo di inclinazione δ è molto piccolo il che significa che :

$$h(x) \ll l \Rightarrow \frac{h(x)}{l} \approx 0 \quad (7.22)$$

Possiamo semplificare le equazioni di Navier-Stokes ragionando sugli ordini di grandezza. Infatti si ha:

$$x \approx l$$

$$y \approx h$$

$$u \approx U$$

$$v/u \approx 0$$

$$w/u \approx 0$$

Nel caso in esame, il termine non lineare $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ non è nullo. Tuttavia possiamo mostrare che per la maggior parte dei casi di interesse pratico, il termine viscoso più grande $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ è ancora dominante. Infatti, calcoliamo il rapporto tra questi due termini tenendo

conto che il numero di Reynolds tipico è definito come $Re = \frac{\rho U l}{\mu}$:

$$\frac{\text{forze di inerzia}}{\text{forze viscosi}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\rho U^2 l}{\mu U/h^2} = \frac{\rho U l}{\mu} \left(\frac{h}{l}\right)^2 = Re \left(\frac{h}{l}\right)^2 = Re^*$$

dove Re^* rappresenta il cosiddetto *numero di Reynolds ridotto*. Se $Re^* \ll 1$ possiamo trascurare il termine di inerzia rispetto a quello viscoso ed ottenere un'equazione differenziale integrabile e quindi una soluzione analitica esatta. Ad esempio usando dei valori ragionevolmente vicini alla realtà, consideriamo

$$U=10\text{m/s}, \quad l=0.1\text{m}, \quad h=10^{-4}\text{m}, \quad \nu_{olio}=4 \times 10^{-5}$$

si ottiene:

$$Re^* = 0.025$$

Consideriamo ora le equazioni di Navier-Stokes semplificate tenendo conto degli ordini di grandezza e della condizione $Re^* \ll 1$. Teniamo conto anche che le condizioni per la pressione sono

$$p(x=0)=p_0 \quad \text{e} \quad p(x=l)=p_0. \tag{7.23}$$

L'unica equazione che resta ci dà:

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7.24}$$

Notiamo che il gradiente di pressione lungo x non è costante perché il meato ha sezione non costante però, sulla base degli ordini di grandezza e dalla seconda equazione di NS,

otteniamo ancora che $\frac{dP}{dx} = F(x)$ cioè questo termine può essere considerato costante in y e quindi può essere trattato come una costante nell'integrazione in y dell'equazione differenziale (7.24).

L'equazione di continuità in forma differenziale, può essere rimpiazzata in questo caso dalla condizione che la portata in volume in ciascuna sezione del meato sia costante, e cioè:

$$Q = \int_0^{h(x)} u(y) dy = \text{cost} \tag{7.25}$$

Possiamo ora integrare l'equazione (7.24) tenendo conto che le condizioni al contorno per la velocità sono:

$$\begin{cases} u(y=0) = U \\ u(y=h(x)) = 0 \end{cases} \quad (7.26)$$

Il gradiente di pressione dovrà invece soddisfare l'equazione di continuità (7.25) con le condizioni al contorno (7.23).

Integrando la (7.24) con le condizioni al contorno (7.26), si ottiene:

$$u(y) = U \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx}\right) h y \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (7.27)$$

Come detto il gradiente di pressione deve essere determinato in modo tale da soddisfare l'equazione (7.25). Sostituendo la (7.27) nella (7.25) si ottiene (risolvendo l'integrale):

$$Q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{dp}{dx}\right) \quad (7.28)$$

da cui si ricava:

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu \left(\frac{U}{2h^2} - \frac{Q}{h^3}\right) \quad (7.29)$$

Integrando questa relazione tra 0 ed il generico x , si ottiene:

$$p(x) = p(0) + \int_0^x \frac{6\mu U}{h^2} dx + \int_0^x \frac{12\mu Q}{h^3} dx \quad (7.30)$$

$$p(x) = p(0) + 6\mu U b_1(x) + 12\mu Q b_2(x) \quad (7.31)$$

avendo posto

$$b_1(x) = \int_0^x \frac{1}{h^2} dx, \quad \text{e} \quad b_2(x) = \int_0^x \frac{1}{h^3} dx$$

Integrando la (7.30) tra 0 e l , e tenendo conto che $p(0)=p(l)$, si può ottenere una nuova espressione della portata Q :

$$Q = \frac{1}{2} U \frac{\int_0^l \frac{1}{h^2} dx}{\int_0^l \frac{1}{h^3} dx} \quad (7.32)$$

ovvero

$$Q = \frac{1}{2} U H \quad (7.33)$$

avendo definito

$$H = \frac{\int_0^l \frac{1}{h^2} dx}{\int_0^l \frac{1}{h^3} dx} \quad (7.34)$$

il cosiddetto *spessore caratteristico* il cui significato fisico è evidente dalla relazione (7.33). Questa è una quantità che caratterizza il meato ed è molto importante per caratterizzare l'andamento della pressione. Infatti sostituendo l'espressione di Q data dalla (7.33) nella relazione (7.29) si ottiene:

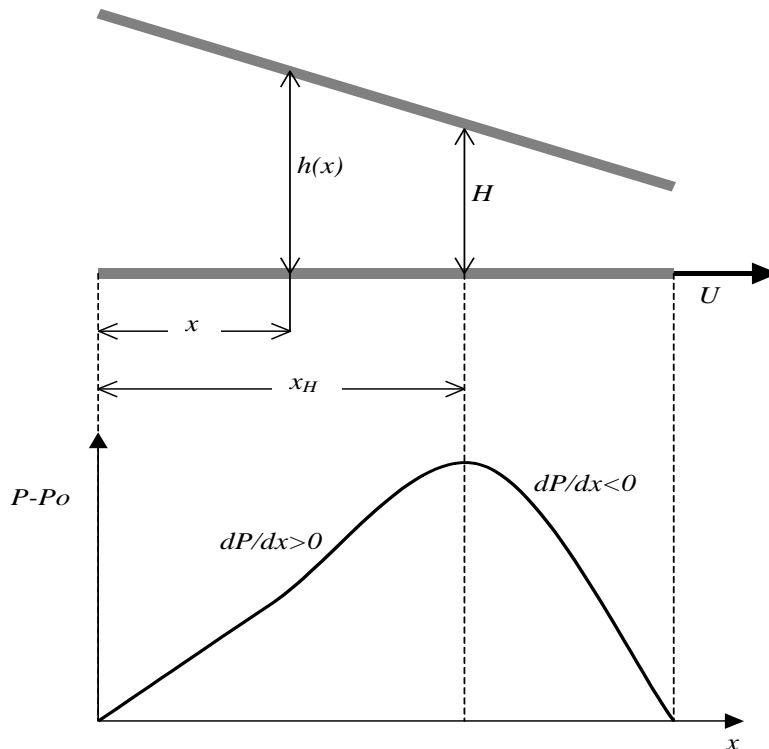
$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{H}{h}\right) \quad (7.35)$$

Quindi per $h=H$ si ha che $\frac{dp}{dx} = 0$ e quindi la pressione ha un massimo o un minimo.

In genere è positivo avere un eccesso di pressione (cioè $p-p_o > 0$).

Perché ciò succeda si devono avere le seguenti condizioni:

Supponendo che $p-p_o=0$ in $x=0$ e che lo spessore caratteristico H corrisponda ad $h(x)$ calcolata in x_H , si deve avere:

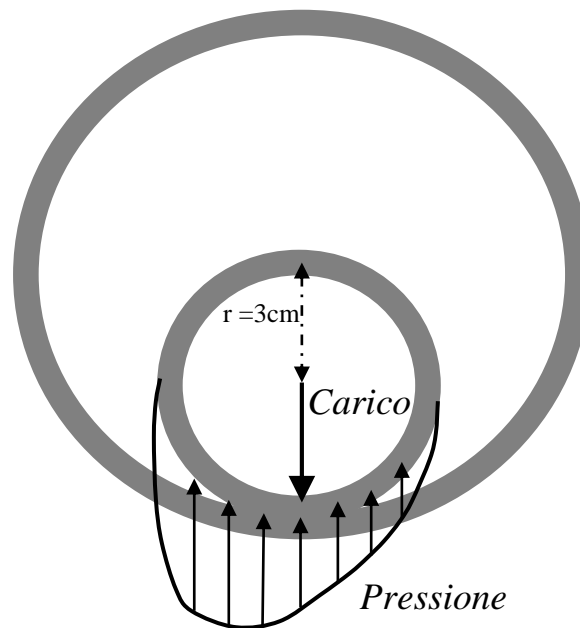


$$\begin{aligned} \text{per } 0 < x < x_H &\Rightarrow h(x) > H \Rightarrow \frac{dP}{dx} > 0 \\ \text{per } x_H < x < l &\Rightarrow h(x) < H \Rightarrow \frac{dP}{dx} < 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

Si ha cioè una zona dove $\frac{dp}{dx} > 0$ ed in cui la pressione raggiunge un massimo che risulta essere molto elevato (anche 3 o 4 atmosfere). In effetti come si vede dalla relazione (7.31) l'intensità dell'eccesso di pressione è proporzionale al rapporto l/h^2 e quindi se $h \ll l$ può raggiungere valori elevatissimi che si oppongono all'azione del carico esterno. Infatti, la pressione così elevata impedisce alle due superfici di venire a contatto.

E' interessante notare che per ottenere un gradiente di pressione positivo è necessario che ci sia un tratto convergente nel meato. Questo è un comportamento opposto rispetto ai flussi subsonici (*Euleriani* $Re \rightarrow \infty$) studiati nei capitoli precedenti nel caso delle lubrificazioni l'effetto è legato alle forze viscosive che sono dominanti ($Re^* = 0$).

Da quanto detto emerge che, nel caso di cuscinetti, è necessario che ci sia un'eccentricità in modo da ottenere uno spessore del meato ($h(x)$) variabile con x e quindi una zona convergente in corrispondenza della quale sarà posizionato lo spessore caratteristico H e quindi il massimo della pressione.



Ad esempio per il sistema perno-cuscinetto in figura, che ammettiamo lungo $l = 0.1$ m, l'ordine di grandezza del carico che può essere sostenuto è:

$$(3 \text{ atm} \cong 3 \times 10^5 \text{ Pa})$$

$$\text{Carico} \cong 3 \times 10^5 \times 0.1 \times 0.1 \cong 3 \times 10^3 \text{ N}$$

cioè circa 300 Kg peso

E' importante notare che quanto detto fin'ora è valido se il problema può essere considerato 2D. La componente di velocità lungo z (che indichiamo con w) è importante se la lastra in moto possiede una componente di velocità in z (che indichiamo con W). L'equazione di continuità diventa:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \, dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w \, dy = 0$$

e in forma differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu \frac{\partial(hU)}{\partial x} + \frac{\partial(hW)}{\partial z} \quad (7.37)$$

Questa relazione è chiamata equazione della lubrificazione di Reynolds.

Un'altra limitazione all'applicazione della teoria precedente è legata al fatto che, proprio per l'azione delle forze viscosi, si ha un notevole aumento della temperatura. Poiché un aumento della temperatura causa una diminuzione di μ , si può avere un aumento eccessivo di Re^* e quindi potrebbe non essere più lecito trascurare i termini non lineari. In effetti, attraverso studi sperimentali, si è trovato che per $Re^*=5$ la correzione dovuta alle forze di inerzia non supera il 10%, e quindi $Re^*=5$ rappresenta il limite di applicabilità della teoria qui presentata.