

# Urti Normali

Meccanica dei Fluidi: Modulo di Fluidodinamica

AA 2013-2014

A cura di: Alessandro Di Marco, PhD

# Effetto del Ma sul flusso compressibile nei condotti

Flusso Stazionario compressibile quasi unidimensionale (QU)  $Re \rightarrow \infty, Fr \rightarrow \infty, St \rightarrow \infty$

Condotto a sezione debolmente variabile  $u_2 = u_3 = 0$   $\left( \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1} \neq 0 \right)$

Valutiamo condizioni di flusso in funzione dell'area A. Dalla CdM:

$$\rho u A = const$$

Differenzio:  $\frac{d}{dx}(\rho u A) = 0 \longrightarrow \rho u \frac{dA}{dx} + \rho A \frac{du}{dx} + u A \frac{d\rho}{dx} = 0$

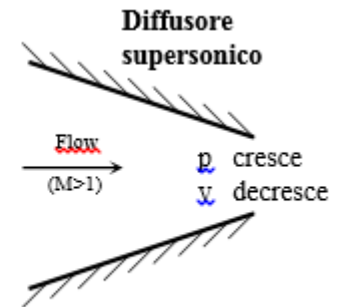
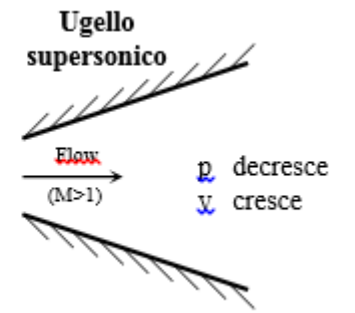
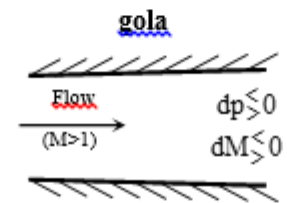
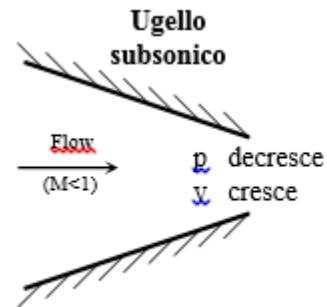
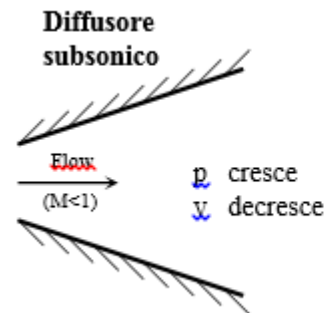
Divido per  $\rho u A$ :  $\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0$

Ricordo che CQM:  $\rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} P \longrightarrow \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx} \longrightarrow \rho u \frac{du}{dx} = -c_0^2 \cdot \frac{d\rho}{dx}$

# Effetto del Ma sul flusso compressibile nei condotti

Quindi: 
$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} - \frac{u}{c_0^2} \frac{du}{dx} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \left( 1 - \frac{u^2}{c_0^2} \right) = 0$$

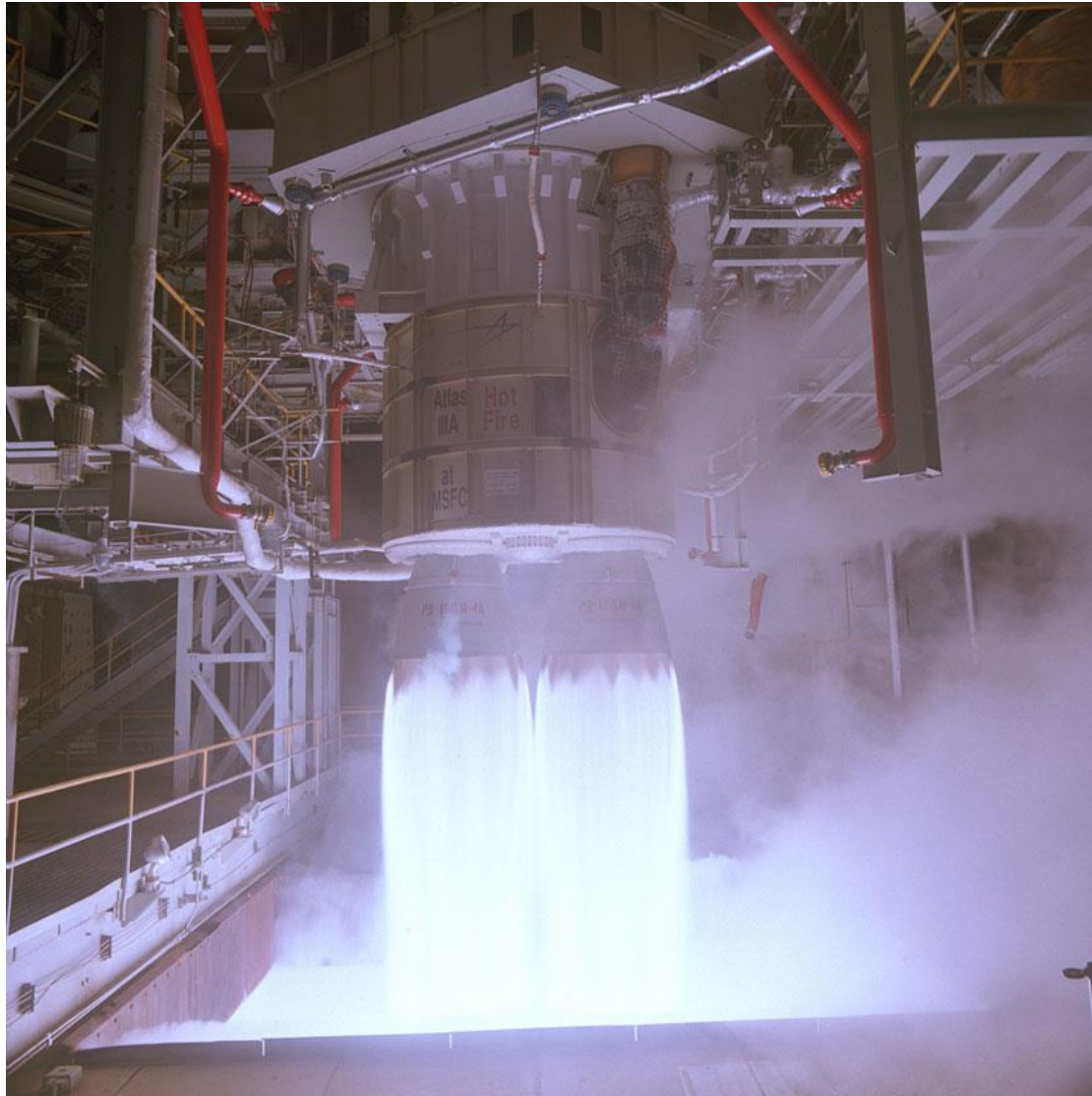
Da cui: 
$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} (Ma^2 - 1)$$



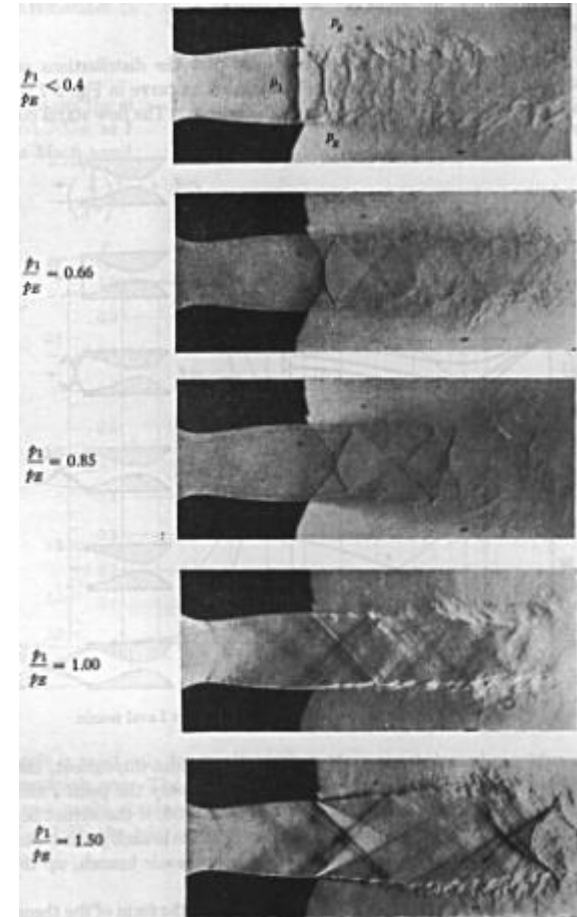
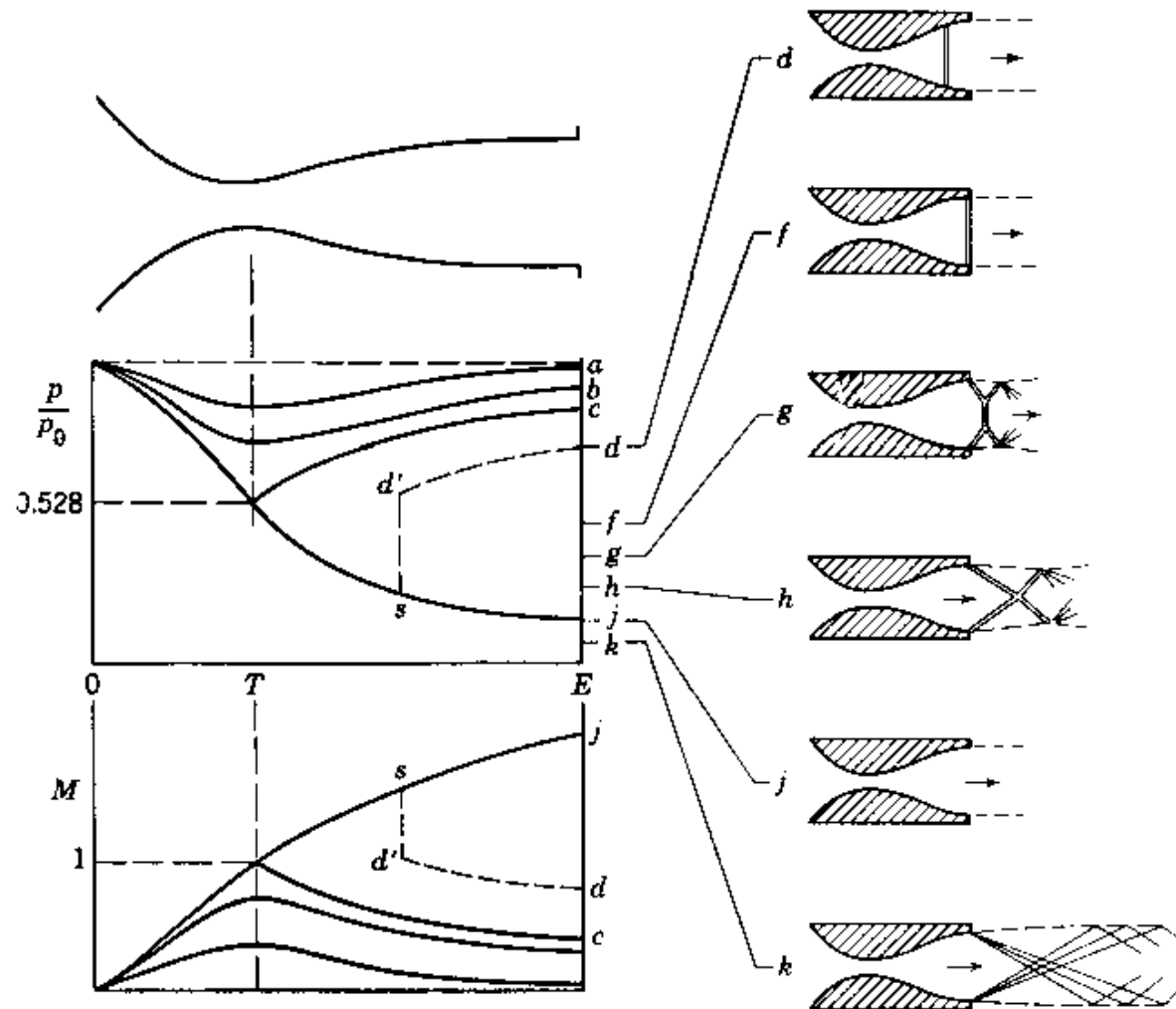
# Ugello Convergente-Divergente (De Laval)

- Consente di accelerare i gas oltre Mach 1;
- È una delle configurazioni più usate in alcune applicazioni aerospaziali (propulsione);
- Inventata da Gustaf de Laval nel 1888 per essere utilizzata nelle turbine a vapore;
- Utilizzata nei razzi da Robert Goddard;
- La temperatura e la pressione statica diminuiscono all'aumentare del Mach dei gas di scarico;
- Maggiore è il Mach in uscita maggiore sarà la spinta.

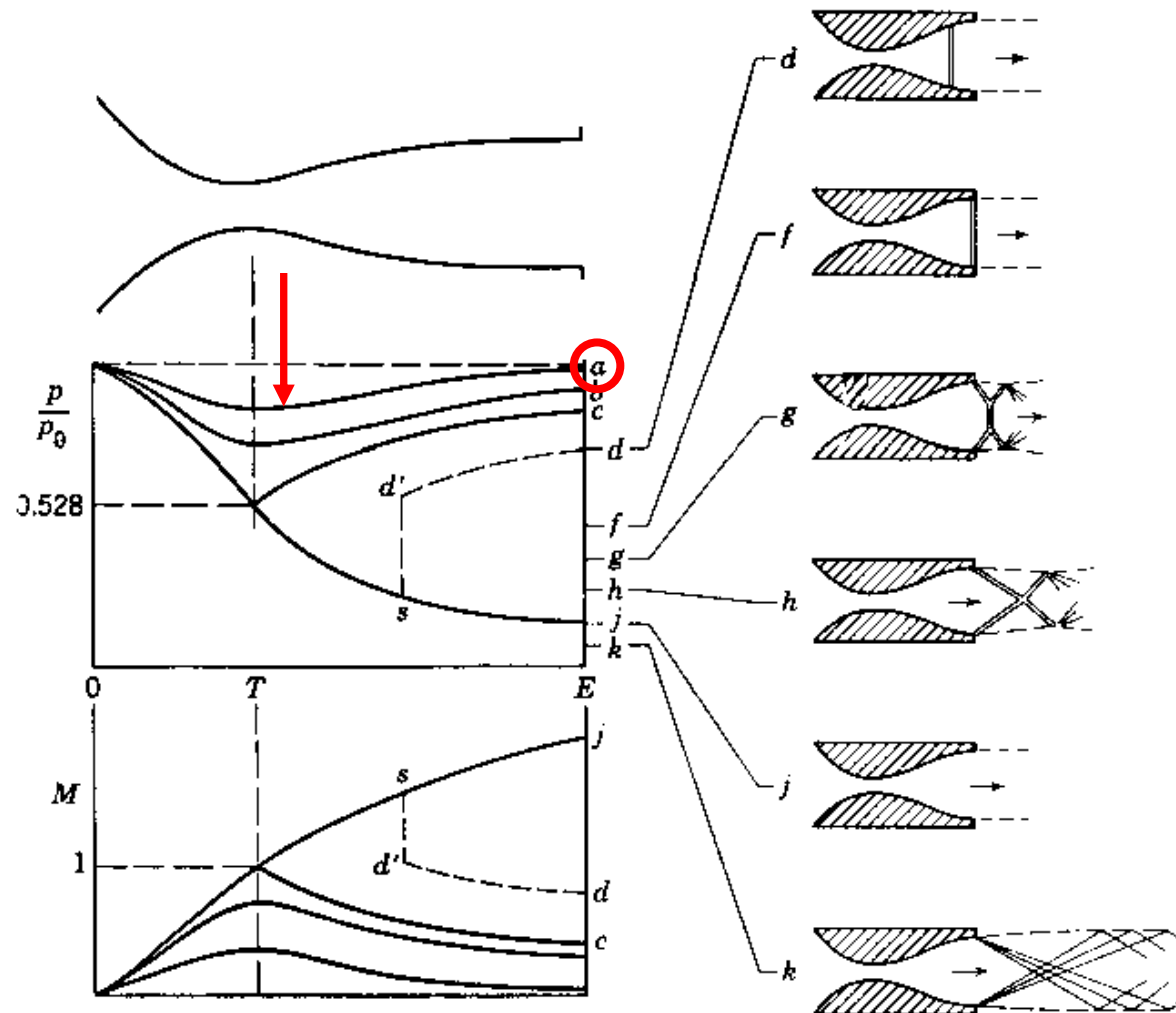
# Ugello Convergente-Divergente (De Laval)



# Effetto del rapporto tra le pressioni sul flusso in un ugello di De Laval



# Effetto del rapporto tra le pressioni sul flusso in un ugello di De Laval



a) Pressione esterna ( $p_e$ ) poco inferiore a  $p_0$

Il flusso accelera nel convergente

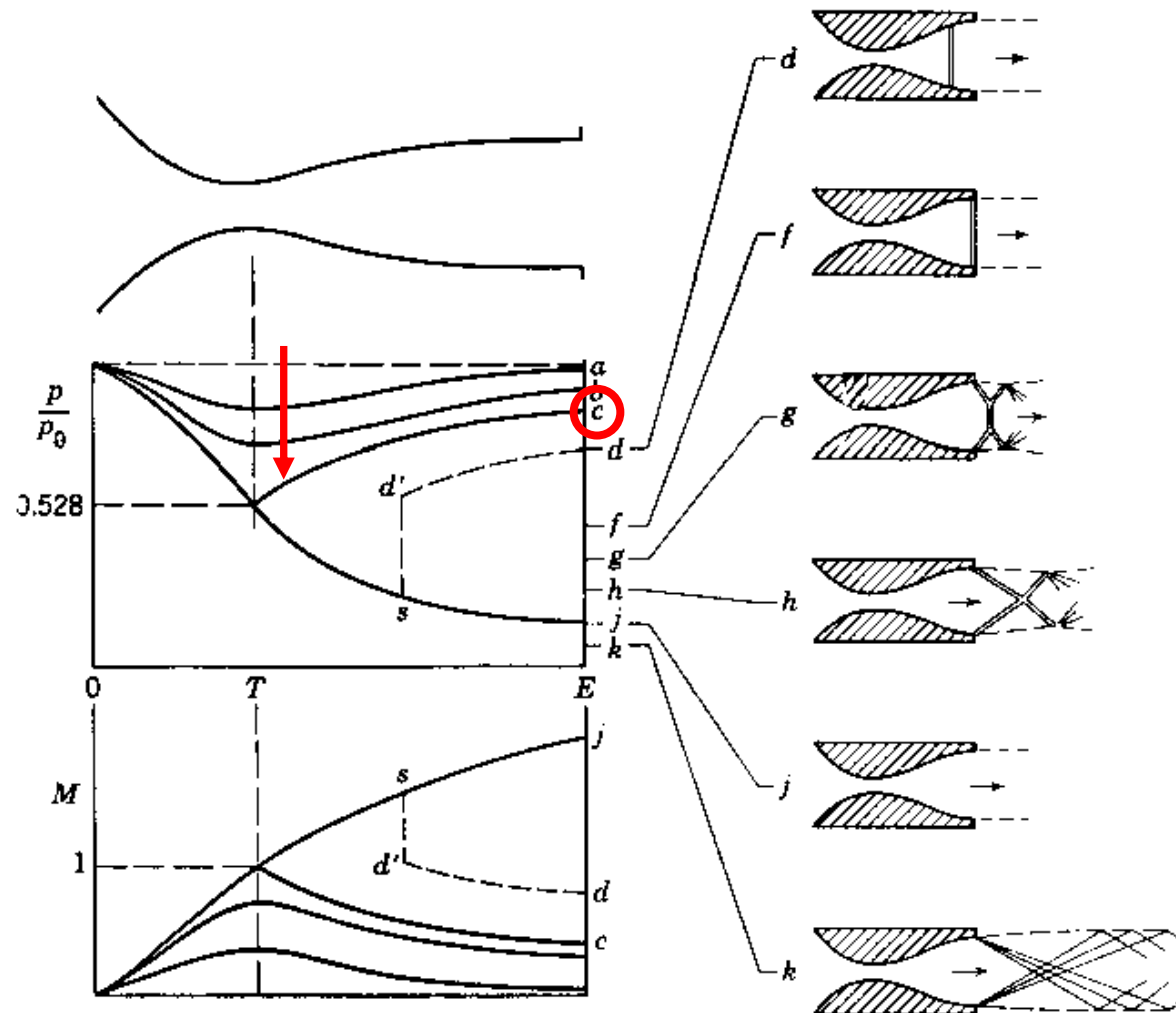
Non raggiunge  $M=1$  nella sezione di gola

Essendo quindi **Subsonico** si ricomprime nel divergente.

b) Diminuisco Pressione esterna ( $p_e$ )

Il flusso accelera ma non abbiamo ancora condizioni soniche in gola.

# Effetto del rapporto tra le pressioni sul flusso in un ugello di De Laval



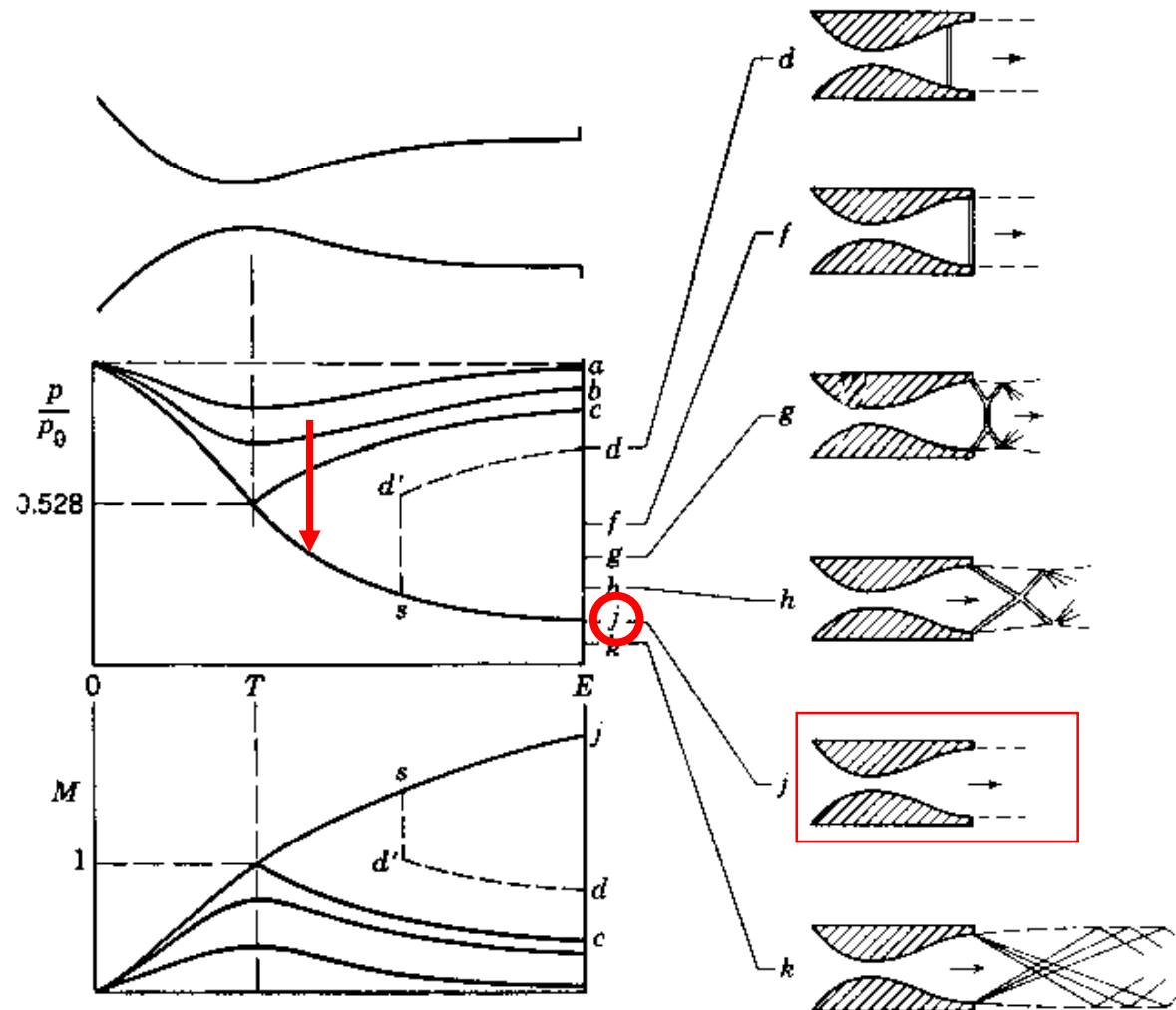
c) Diminuisco pressione esterna ( $p_e$ )

Si raggiunge una condizione per la quale si ha  $M=1$  in gola.

Il flusso è ancora subsonico nel divergente.



# Effetto del rapporto tra le pressioni sul flusso in un ugello di De Laval

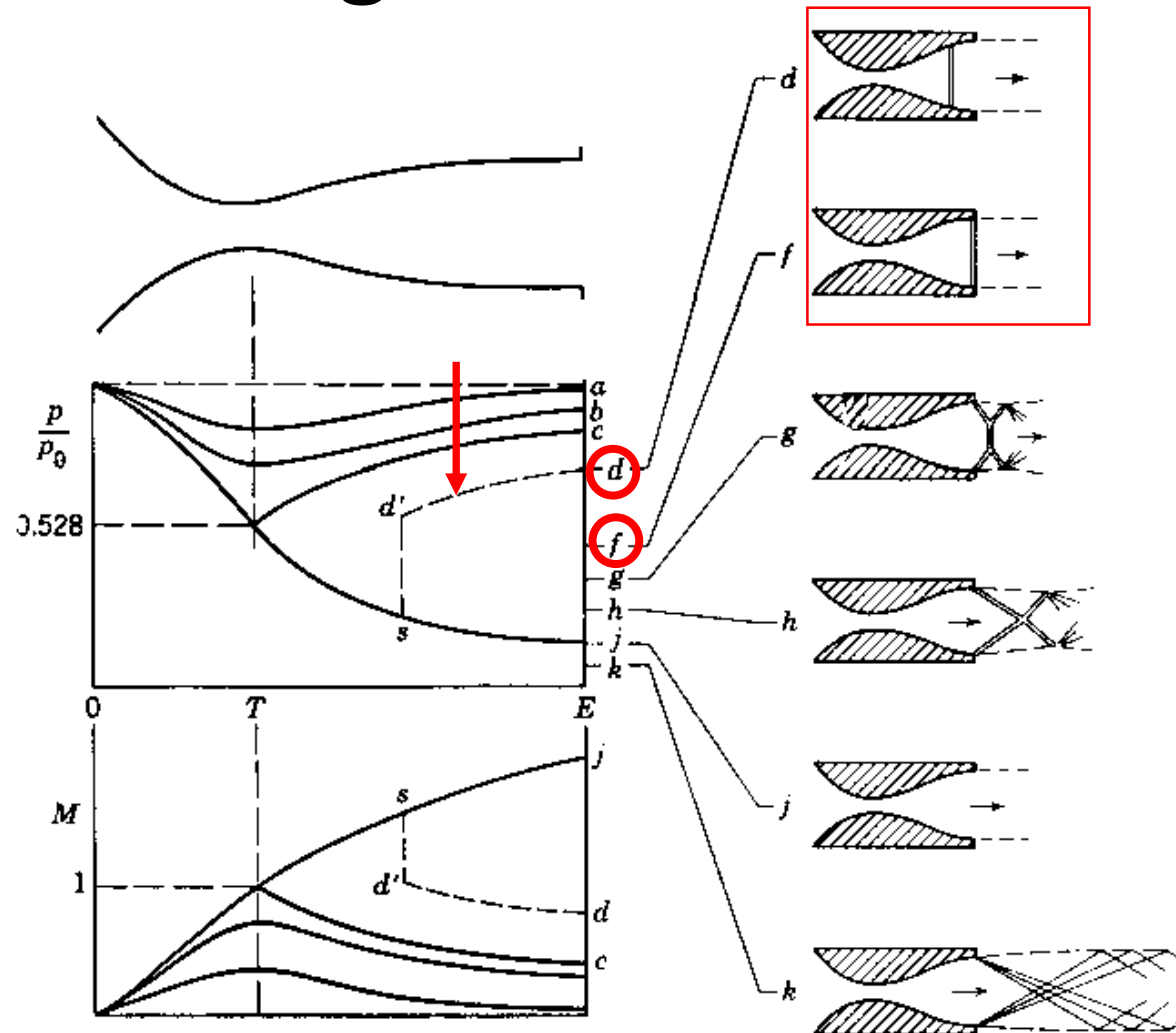


j) Condizioni di progetto ( $p_e = p_j$ )

Il flusso si espande isentropicamente fino alla pressione  $p_j$ .

Il flusso è supersonico nel divergente.

# Effetto del rapporto tra le pressioni sul flusso in un ugello di De Laval



**d-f)** Condizione ( $p_f \leq p_e < p_c$ )

Abbassando la  $p_e$  da  $p_c$  la pressione in gola non varia più.

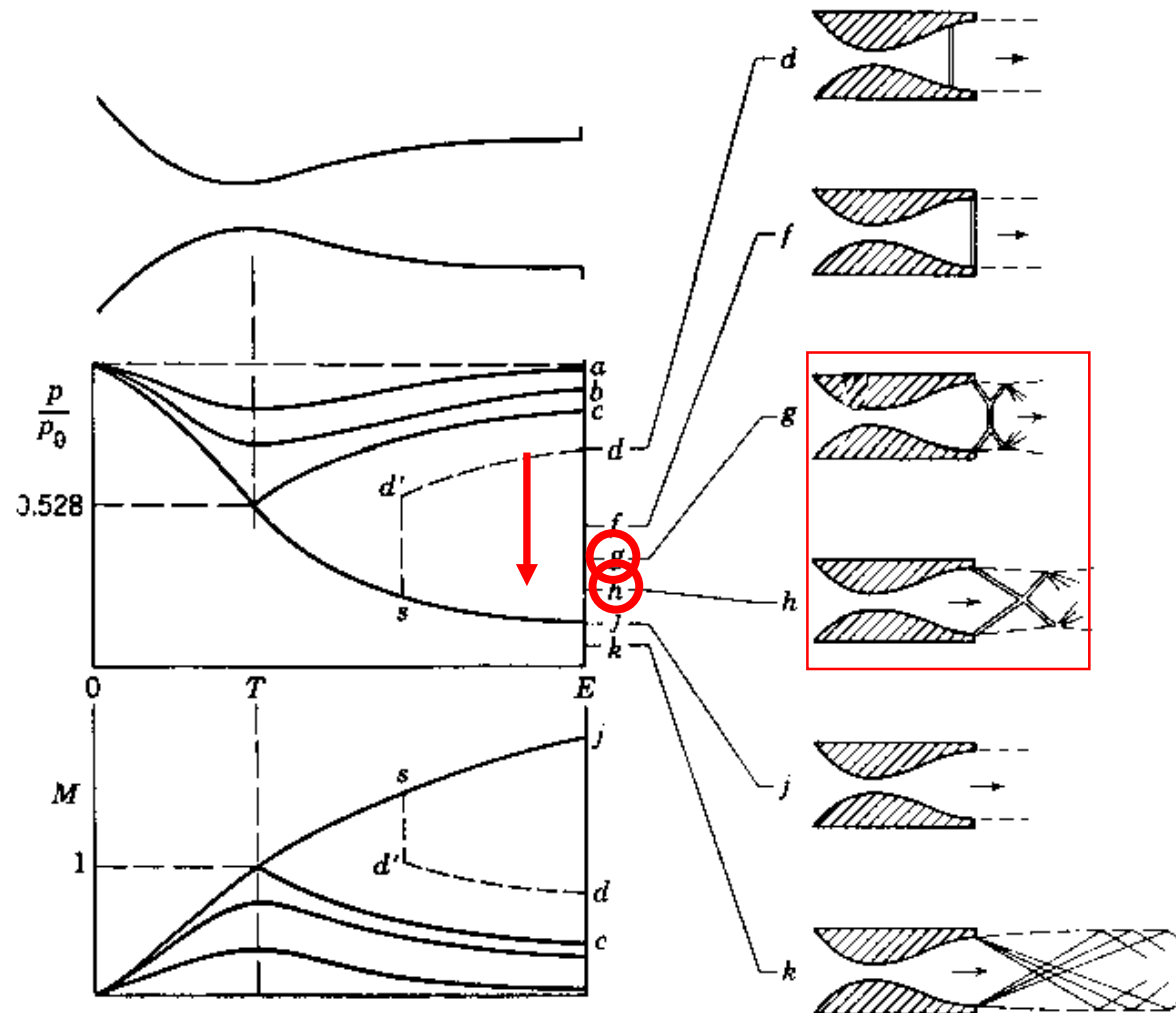
La portata non aumenta ulteriormente (choking).

In queste condizioni non esiste alcuna soluzione isentropica. Si verificherebbe una discontinuità!

Si ha la comparsa di un **Onda D'Urto**: dopo l'espansione supersonica si ha una brusca ricomprensione. Poi subsonico.

Al diminuire della  $p_e$  l'onda si sposta verso l'uscita. In **f** l'urto si verifica nella sezione di uscita.

# Effetto del rapporto tra le pressioni sul flusso in un ugello di De Laval

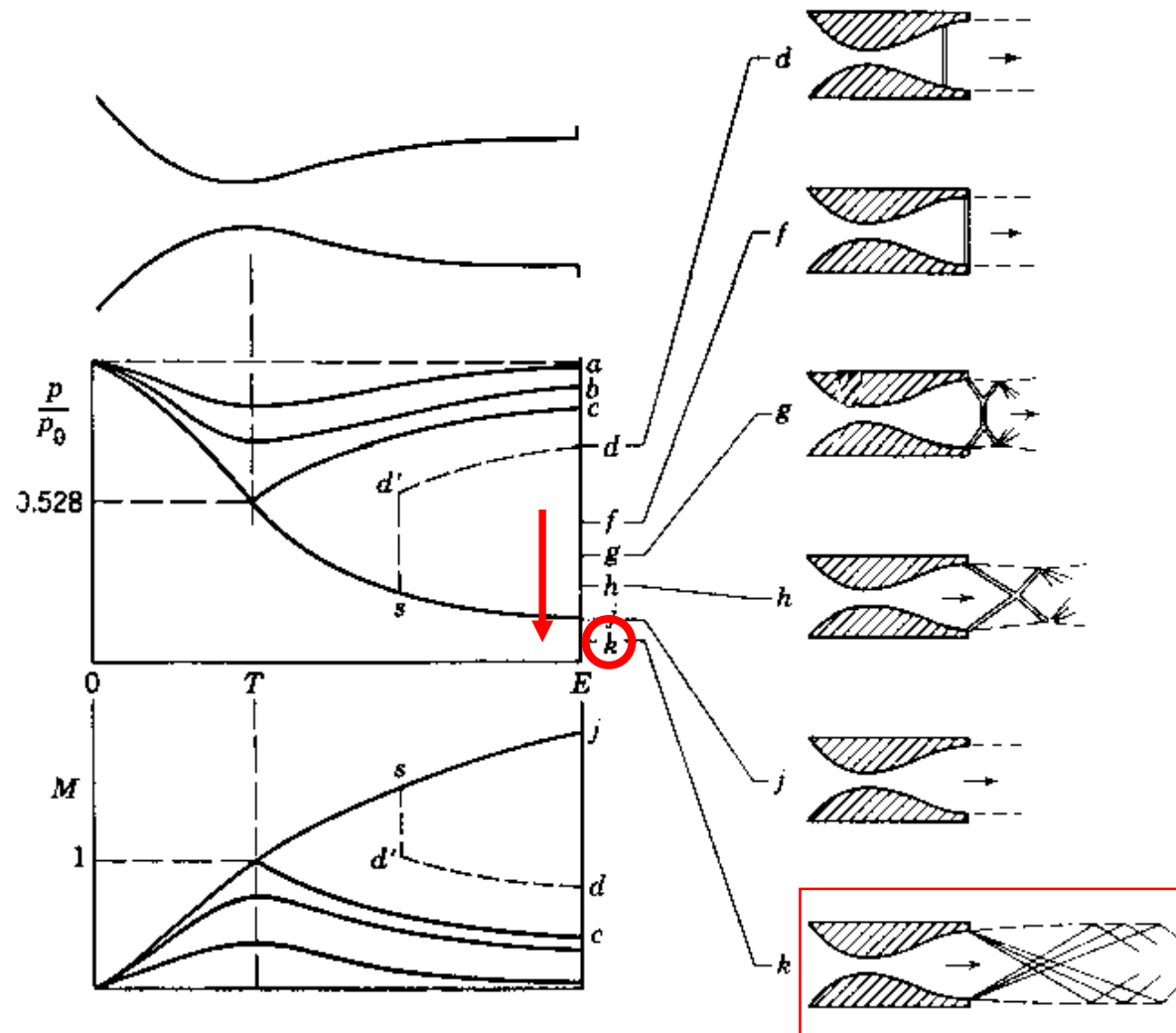


**g-h)** Condizione ( $p_j < p_e < p_f$ )

Il flusso è supersonico in tutto il divergente ma la pressione di uscita è inferiore a quella esterna.

La compressione si verifica all'esterno con un sistema di Urti Obliqui. **Ugello sovraespanso.**

# Effetto del rapporto tra le pressioni sul flusso in un ugello di De Laval



k) Condizione ( $p_e < p_j$ )

L'espansione prosegue all'esterno del divergente. **Ugello Sottoespanso.**

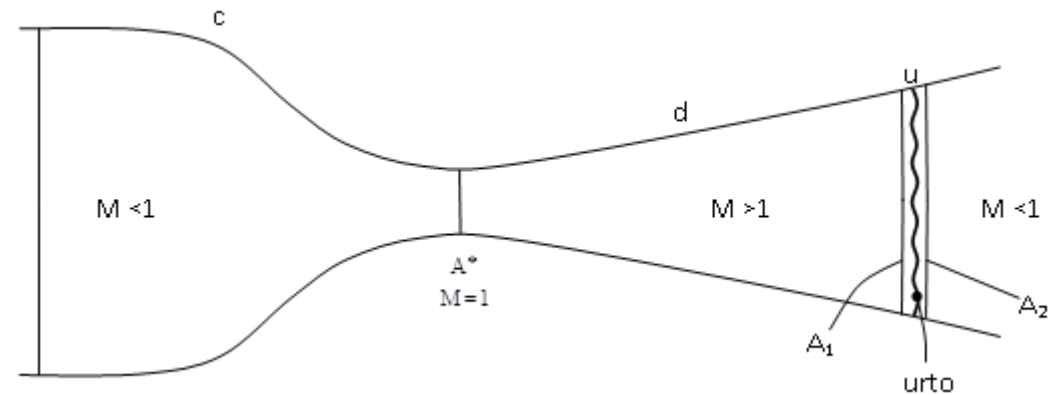
# Modello matematico per onda d'urto

## Modello Matematico

Processi dissipativi quindi non si può far uso delle isentropiche. Notevoli variazioni di entropia.

Urto di spessore infinitesimo dell'ordine del cammino medio.

Ipotesi di Unidimensionalità.



Equazioni di partenza

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

Equazione di CdM

$$\rho_1 u_1^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2$$

Equazione di CQM

# Modello Unidimensionale (U)

Si trascurano:

$$u_2 = u_3 = 0 \quad \left( \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1} \neq 0 \right)$$

Si trascurano le variazioni di area, quindi:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho u = \text{cost}$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} P \quad \longrightarrow \quad \frac{d(\rho u^2)}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dx}(\rho u^2 + P) = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho u^2 + P = \text{cost}$$

Da cui:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad \rho_1 u_1^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2$$

# Onda d'urto normale

Dalla QM sostituendo l'equazione di stato:

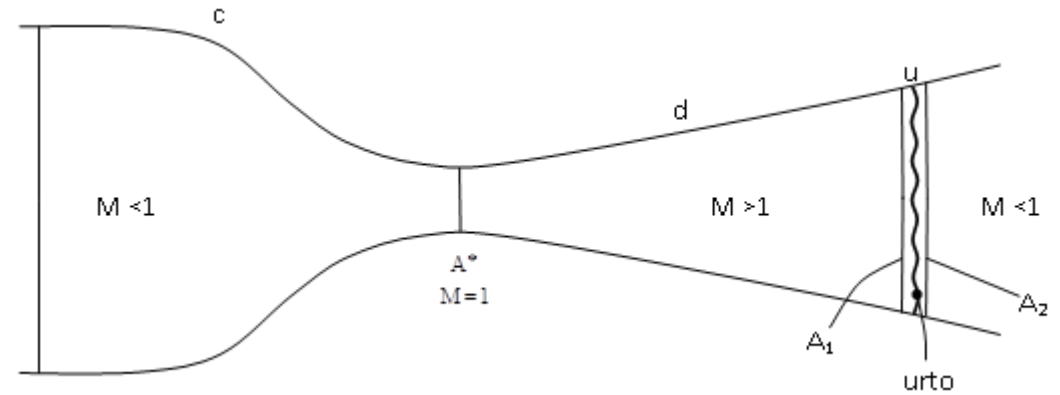
$$P_1 + \frac{P_1}{RT_1} u_1^2 = P_2 + \frac{P_2}{RT_2} u_2^2$$

Riarrangio con  $\gamma$ :

$$P_1 \left( 1 + \frac{\gamma u_1^2}{\gamma RT_1} \right) = P_2 \left( 1 + \frac{\gamma u_2^2}{\gamma RT_2} \right)$$

Otengo il rapporto delle pressioni monte e valle dell'urto:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}$$



# Onda d'urto normale

Dalla CdM e dall'equ di stato:

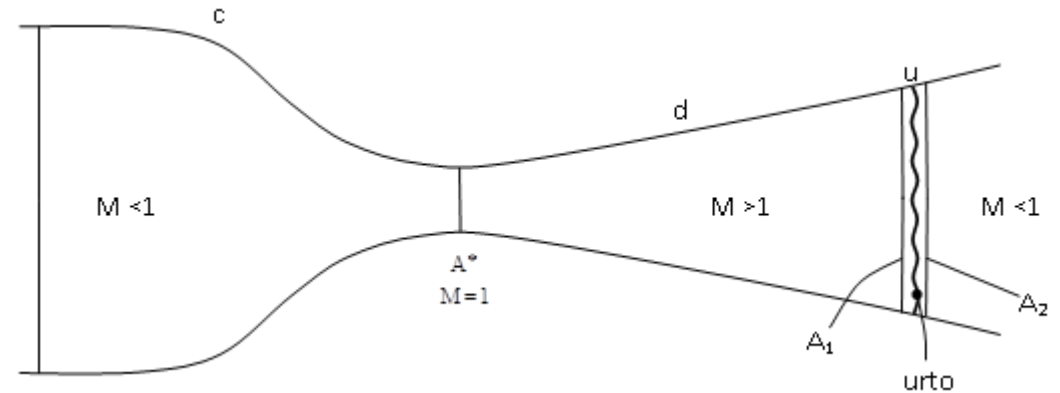
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1 R T_1}{\rho_2 R T_2} = \frac{u_2 T_1}{u_1 T_2} = \frac{(\gamma R T_2)^{1/2}}{(\gamma R T_1)^{1/2}} \frac{T_1}{T_2} \frac{M_2}{M_1}$$

Cioè:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{1/2} \frac{M_2}{M_1} \xrightarrow{\frac{T_1}{T_2} = H(M_1, M_2)} \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} = H^{1/2}(M_1, M_2) \frac{M_2}{M_1}$$

Combinando le precedenti equazioni si ottengono:

$$M_2^2 = \frac{\frac{2}{\gamma-1} + M_1^2}{\frac{2\gamma M_1^2}{\gamma-1} - 1} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1\right)}{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} M_1^2} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2}$$





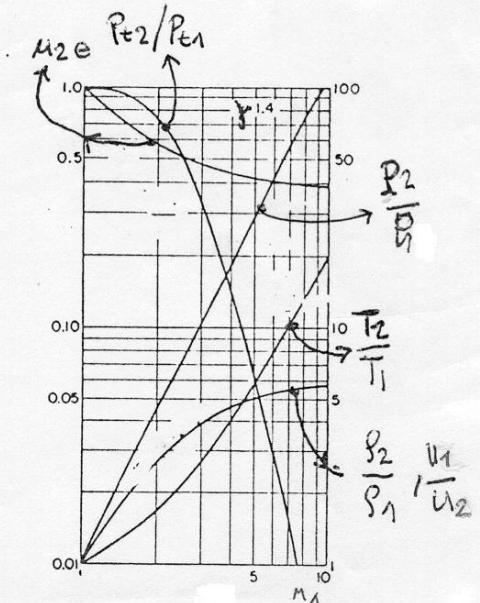
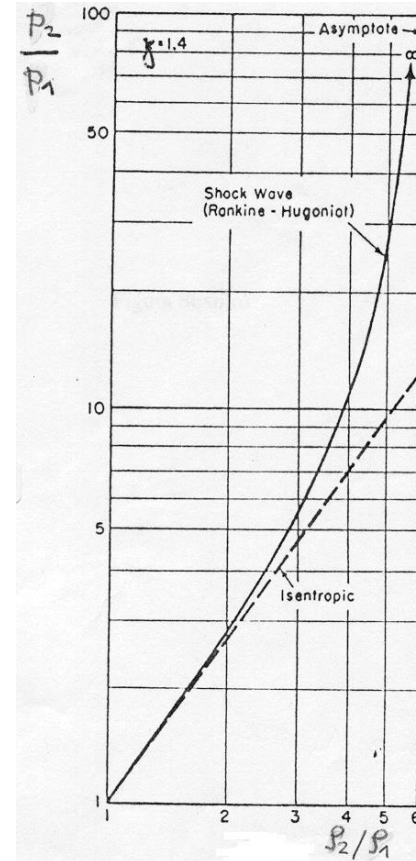
# Onda d'urto normale

Dalle relazioni precedenti eliminando  $M_1$  si ottengono le relazioni di **Rankine-Hugoniot**:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{P_2}{P_1} \left[ 1 + \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \frac{P_2}{P_1} \right]}{\frac{P_2}{P_1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} = f_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{P_2}{P_1} \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) + 1}{\frac{P_2}{P_1} + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = f_2 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

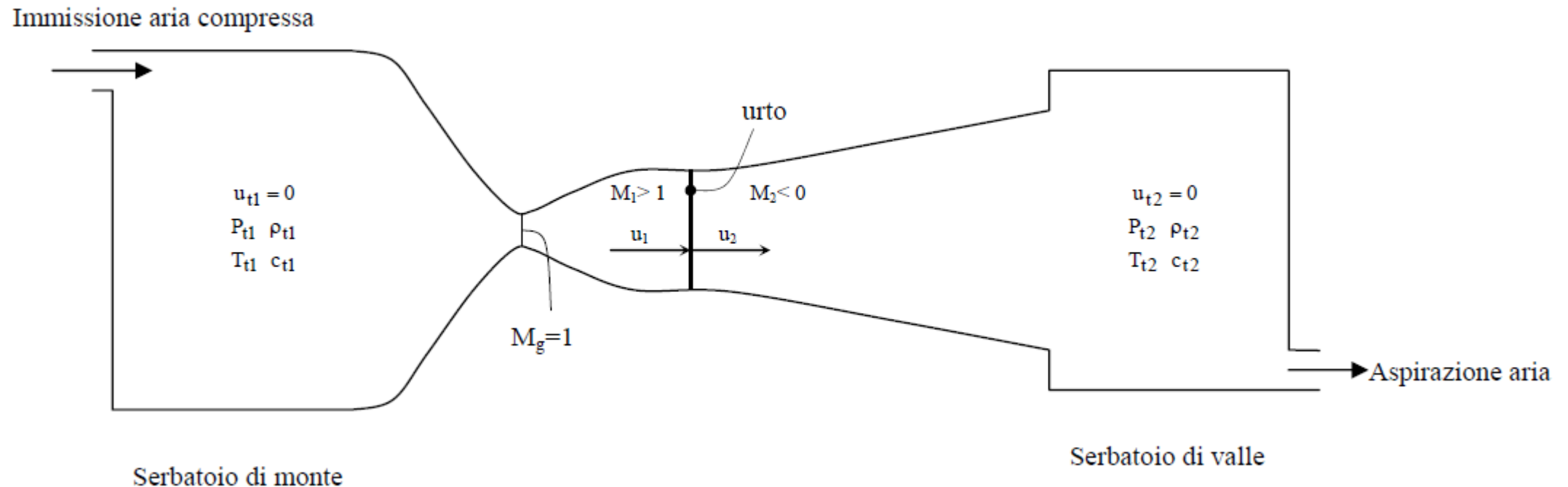
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) - 1}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} = f_3 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$



L'andamento di queste relazioni (Rankine-Hugoniot) è riportato nelle figure.

# Variazione dell'entropia nell'urto

Nell'urto c'è una degradazione di energia meccanica in energia termica che darà luogo ad un aumento di entropia.



La temperatura totale si conserva:  $T_{t1} = T_{t2} = T_t$  Che implica:  $C_{t1} = C_{t2} = C_t$

# Variazione dell'entropia nell'urto

Ricordando che:  $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$   $dS = c_v \left( \frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \right) = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$

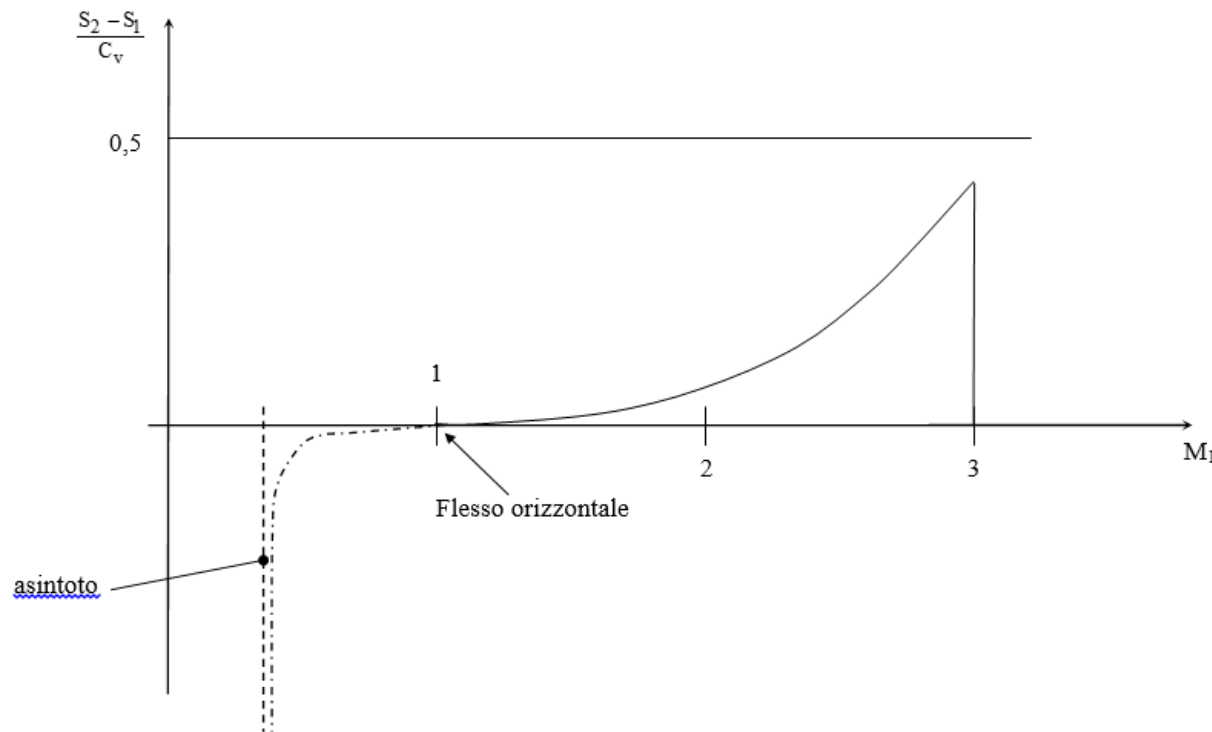
Integro tra due stati 1 e 2:  $S_2 - S_1 = c_v \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + c_v (\gamma - 1) \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) = c_v \left( \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + \ln \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma - 1} \right)$

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma - 1} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma} = c_v \ln \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma}$$

Si può ottenere un'equazione:  $\frac{S_2 - S_1}{C_v} = f(M_1) = \gamma \ln \left[ \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] + \ln \left[ \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right]$

# Variazione dell'entropia nell'urto

L'andamento dell'equazione: 
$$\frac{S_2 - S_1}{C_v} = f(M_1) = \gamma \ln \left[ \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] + \ln \left[ \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right]$$



$M_1 < 1$  non è fisicamente realizzabile

Intorno a  $M_1 = 1$  urti deboli

Aumentando  $M_1$  cresce l'intensità dell'urto