Strato limite

Lezioni di Aerodinamica

Anno Accademico 2009-2010

A cura di: A. Di Marco, Ph.D.

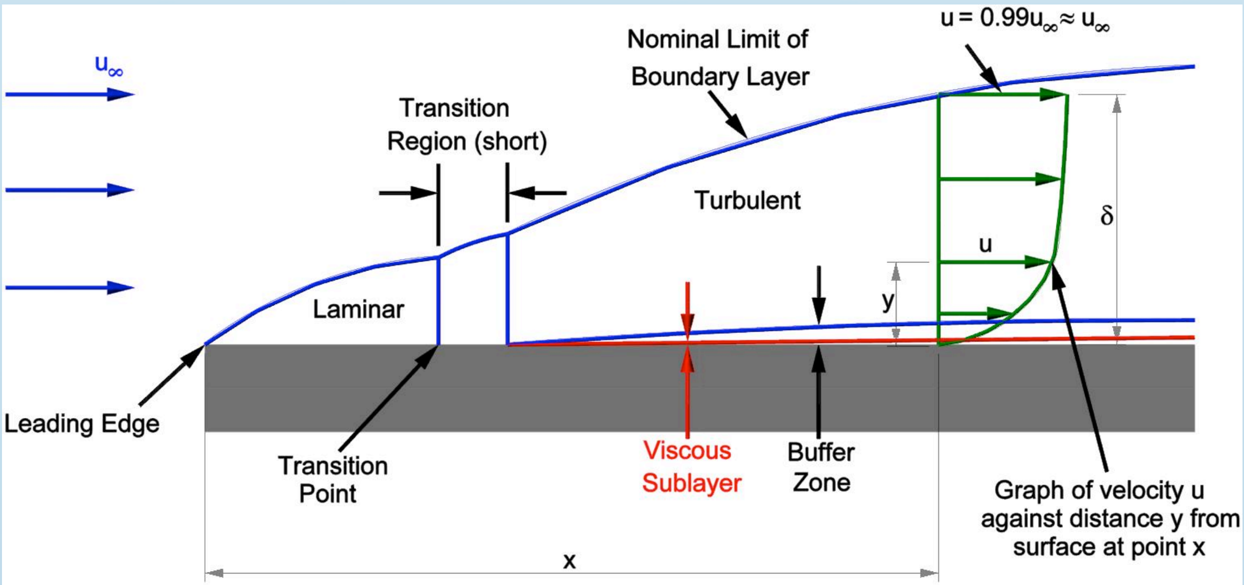
BL Cinematico Laminare Bidimensionale Incompressibile Stazionario

La transizione da zero, sul corpo, alla velocità sul bordo esterno dello strato limite avviene in uno strato molto piccolo (tre ordini di grandezza) chiamato appunto BL.

$$Re \to \infty \qquad\qquad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si può suddividere il campo in due zone:

1) Piccola zona nelle vicinanze del corpo in cui il gradiente di velocità è molto grande (ZI).
2) Nella regione rimanente (ZE) non si hanno grossi gradienti di velocità e l'influenza delle forze viscose è trascurabile. In tale regione il flusso è irrotazionale e potenziale.



BL Lastra piana

Semplificazione delle equazioni di N-S

Equazioni di Partenza:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot (\rho \overline{u}) = 0 \qquad \rho \frac{D\overline{u}}{Dt} = -\overline{\nabla} P + \overline{\nabla} \cdot \overline{\overline{\sigma}} + \rho \overline{f} \qquad \rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \overline{\nabla} \cdot (k \overline{\nabla} T) + \mu \varphi^2$$

Ipotesi: 2D, Stazionario, ρ=cost.
Le equazioni di N-S devono rispettare le condizioni di impermeabilità e non scorrimento in prossimità della parete del corpo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} \right) = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho\left(u \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial v}{\partial y} \right) = -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

Con BC

$$u = v = 0 \;\; per \;\; y = 0$$
$$u = U_e \;\; per \;\; y \to \infty$$
$$u = u(y) \quad per \quad x = x_0$$

$\mathrm{Re} \to \infty$ → Trascurare le forze viscose → Equazioni di Eulero

Singolarità

Le forze viscose non sono trascurabili nel BL → Adimensionalizzazione, valutazione ordini di grandezza

Semplificazione delle equazioni di N-S

Grandezze adimensionali:

$$x' = \frac{x}{L} \qquad y' = \frac{y}{\delta} \qquad u' = \frac{u}{U} \qquad \mathrm{v}' = \frac{v}{V} \qquad P' = \frac{P}{P_0}$$

Equazione Continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U}{L}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V}{\delta}\frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{U}{V}\cdot\frac{\delta}{L}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{V}{U} = o\left(\frac{\delta}{L}\right) \qquad \frac{U}{V}\frac{\delta}{L} = 1$$

$$\boxed{\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial y'} = 0}$$

Semplificazione delle equazioni di N-S

Grandezze adimensionali:

$$x' = \frac{x}{L} \qquad y' = \frac{y}{\delta} \qquad u' = \frac{u}{U} \qquad v' = \frac{v}{V} \qquad P' = \frac{P}{P_0}$$

Equazione Quantità di moto tangente alla parete:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\frac{U^2}{L}u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho\frac{VU}{\delta}v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{P_0}{L}\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\mu U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{L^2\partial^2 u'}{\delta^2\partial y'^2}\right)$$

Divido tutto per: $\rho\frac{U^2}{L}$

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{VL}{U\delta}v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{P_0}{\rho U^2}\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\mu}{\rho UL}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\mu}{\rho UL}\frac{L^2\partial^2 u'}{\delta^2\partial y'^2}$$

Ricordando che: $\mathrm{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}$ $\quad Ru = \frac{\rho U^2}{P_0}$ $\quad \frac{U}{V}\frac{\delta}{L} = 1$

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{Ru}\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{L^2\partial^2 u'}{\delta^2\partial y'^2}$$

$$\lim_{\mathrm{Re}\to\infty}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{1}{Ru}\frac{\partial P'}{\partial x'} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{L^2\partial^2 u'}{\delta^2\partial y'^2}\right) = 0 \rightarrow \lim_{\mathrm{Re}\to\infty}\frac{L^2}{\delta^2}\frac{1}{\mathrm{Re}} = o(1) \rightarrow \delta = o\left(\frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right)$$

$$\boxed{u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}}$$

Semplificazione delle equazioni di N-S

Grandezze adimensionali:

$$x' = \frac{x}{L} \qquad y' = \frac{y}{\delta} \qquad u' = \frac{u}{U} \qquad v' = \frac{v}{V} \qquad P' = \frac{P}{P_0}$$

Equazione Quantità di moto perpendicolare alla parete:

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\frac{UV}{L}u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + \rho\frac{V^2}{\delta}v'\frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{P_0}{\delta}\frac{\partial P'}{\partial y'} + \frac{\mu V}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{L^2\partial^2 v'}{\delta^2\partial y'^2}\right)$$

Divido tutto per: $\rho\frac{U^2}{\delta}$

$$\frac{V\delta}{UL}u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V^2}{U^2}v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{P_0}{\rho U^2}\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\mu}{\rho UL}\frac{V\delta}{UL}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\mu}{\rho UL}\frac{V\delta}{UL}\frac{L^2\partial^2 u'}{\delta^2\partial y'^2}$$

Ricordando che: $\begin{cases} \frac{\delta}{L} = \frac{V}{U} \\ \frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \end{cases}$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right) = -\frac{1}{Ru}\frac{\partial P'}{\partial y'} + \frac{1}{\mathrm{Re}^2}\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}$$

$$\lim_{\mathrm{Re}\to\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right) + \frac{1}{Ru}\frac{\partial P'}{\partial y'} - \frac{1}{\mathrm{Re}^2}\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right] = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial P'}{\partial y'} = 0}$$

Equazioni dello Strato Limite

Equazioni in forma adimensionale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \dfrac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \\ u'\dfrac{\partial u'}{\partial x'} + v'\dfrac{\partial u'}{\partial y'} = -\dfrac{\partial P'}{\partial x'} + \dfrac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ \dfrac{\partial P'}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

Con BC

$$u' = v' = 0 \quad per \quad y' = 0$$
$$u' = U_e' \quad per \quad y' \to \infty$$
$$u' = u'(y') \quad per \quad x' = x'_0$$

Equazioni in forma dimensionale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \boxed{-\dfrac{\partial P}{\partial x}} + \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Con BC

$$u = v = 0 \quad per \quad y = 0$$
$$u = U_e \quad per \quad y \to \infty$$
$$u = u(y) \quad per \quad x = x_0$$

Due Equ. in tre incognite. Ma all’esterno vale Bernoulli, per cui:

$$\frac{dP_e}{dx} + \boxed{\rho U_e \frac{dU_e}{dx}} = 0$$

$$\boxed{\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho U_e \frac{dU_e}{dx} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

Separazione dello Strato Limite

Equazioni in forma dimensionale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} \right) = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

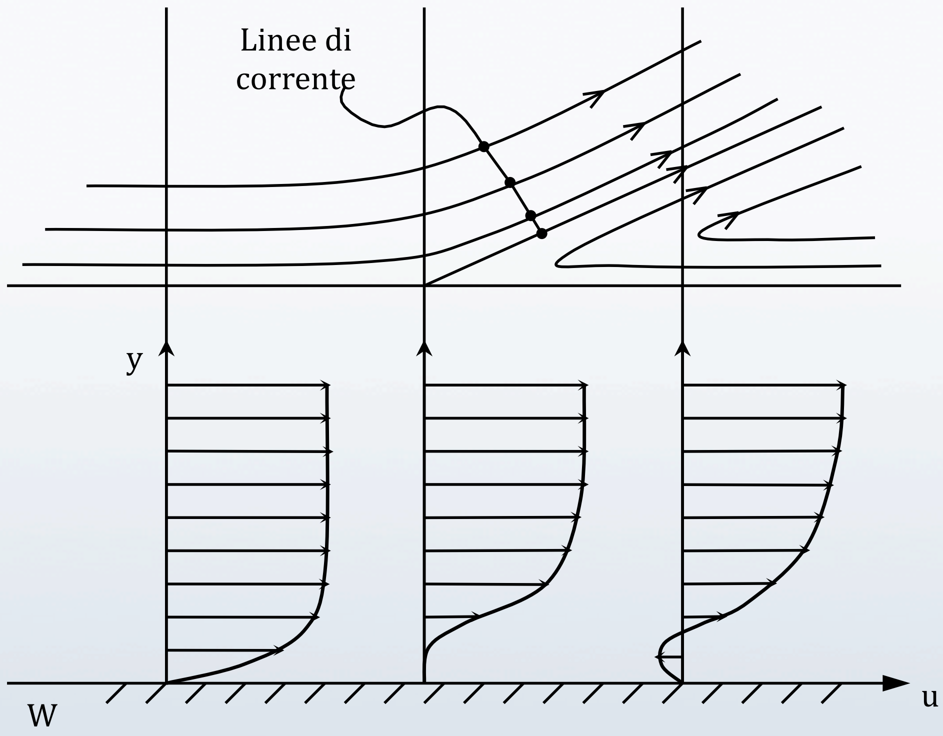
Per:

$$u = v = 0 \;\; per \;\; y = 0$$

Diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_e}{\partial x} = \mu\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_w \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Attenzione a dopo la separazione!



Sforzo tangenziale:	$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\|_W > 0$	$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\|_W = 0$	$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\|_W < 0$
	$\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_W < 0$	$\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_W > 0$	$\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_W > 0$
Gradiente pressione:	$\dfrac{dP_e}{dx} < 0$	$\dfrac{dP_e}{dx} > 0$	$\dfrac{dP_e}{dx} > 0$
Accelerazione:	$\dfrac{dU_e}{dx} > 0$	$\dfrac{dU_e}{dx} < 0$	$\dfrac{dU_e}{dx} < 0$

Differenti Misure dello Spessore di BL

Spessore dello strato limite, δ:

È la distanza dalla parete per la quale si ha $u=0.99U_e$.

Spessore di spostamento, δ_1 o δ^*:

È la distanza alla quale bisognerebbe spostare la parete affinché un ipotetico flusso non viscoso mantenga la stessa portata in massa.

$$\int_0^h u\,dy = U_e\left(h-\delta^*\right) \rightarrow \boxed{\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U_e}\right)dy}$$

Considerando una lastra piana, è la distanza di cui sono spostate le linee di corrente per la presenza del BL.

$$U_e h = \int_0^{h+\delta^*} u\,dy = \int_0^h u\,dy + U_e\delta^* \rightarrow U_e\delta^* = \int_0^h \left(U_e-u\right)dy$$

Spessore della quantità di moto, δ_2 o θ:

È la distanza per la quale la perdita di momento della quantità di moto dovuta alla presenza del BL è pari a $\rho U_e^2\theta$

A: $\rho U_e^2 h$ $-$ B: $\int_0^{h+\delta^*} \rho u^2 dy = \int_0^h \rho u^2 dy + \rho U_e^2\delta^*$ $=$

$$\rho U_e^2 h - \int_0^h \rho u^2 dy - \rho U_e^2\delta^* = \rho U_e^2\theta \rightarrow \int_0^h \left(U_e^2-u^2\right)dy - U_e^2\int_0^h\left(1-\frac{u^2}{U_e^2}\right)dy = U_e^2\theta$$

$$\boxed{\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_e}\left(1-\frac{u}{U_e}\right)dy}$$

Equazioni Strato Limite in termini di ψ

Equazioni SL 2D ed incompressibili si può introdurre la funzione di corrente :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \dfrac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \\ u'\dfrac{\partial u'}{\partial x'} + v'\dfrac{\partial u'}{\partial y'} = -\dfrac{\partial P'}{\partial x'} + \dfrac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ \dfrac{\partial P'}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

Con BC

$$\begin{aligned} &u' = v' = 0 \quad per \quad y' = 0 \\ &u' = U_e' \quad per \quad y' \to \infty \\ &u' = u'(y') \quad per \quad x' = x'_0 \end{aligned}$$

Funzione di corrente in forma adimensionale $\psi'(x', y')$ Tale che $u' = \dfrac{\partial \psi'}{\partial y'}$ $\quad v' = -\dfrac{\partial \psi'}{\partial x'}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} - \dfrac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} = 0 \\ \dfrac{\partial \psi'}{\partial y'}\dfrac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \, \partial y'} - \dfrac{\partial \psi'}{\partial x'}\dfrac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} = \dfrac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} + U'_e \dfrac{dU'_e}{dx'} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Con BC

Impermeabilità $\rightarrow$ $v' = 0 \Rightarrow \left.\dfrac{\partial \psi'}{\partial x'}\right|_{wall} = 0$

Non scorrimento $\rightarrow$ $u' = 0 \Rightarrow \left.\dfrac{\partial \psi'}{\partial y'}\right|_{wall} = 0$

Velocità all'∞ $\rightarrow$ $u' = U'_e \Rightarrow \left.\dfrac{\partial \psi'}{\partial y'}\right|_{e} = U'_e$

E la condizione iniziale: $\quad x' = 0 \rightarrow \quad \psi'(y') = \tilde{\psi}'(y')$

Equazione diff III ordine si integra con metodi numerici.
Oppure:
In alcune situazioni particolari: Soluzioni simili e Metodi integrali.

Soluzioni simili dello SL

Le soluzioni di uno strato limite o in generale di un flusso, si dicono simili se possono essere rese uguali mediante una opportuna trasformazione di coordinate.

$$\frac{u'\left\{x'_1,[y'/g(x'_1)]\right\}}{U'_e(x'_1)} = \frac{u'\left\{x'_2,[y'/g(x'_2)]\right\}}{U'_e(x'_2)}$$

Con *g(x')* funzione di scala.

Equazioni di Falkner-Skan

Applichiamo una trasformazione di coordinate:

$$\xi = x' \;, \quad \eta = \frac{y'}{g(x')}$$

Ed introduciamo le quantità simili:

$$u'_S = \frac{u'(\xi,\eta)}{U'_e(\xi)} \qquad\qquad f(\xi,\eta) = \frac{\psi'(\xi,\eta)}{U'_e(\xi)\, g(\xi)} \Rightarrow \psi'(\xi,\eta) = f(\xi,\eta)\, U'_e(\xi)\, g(\xi)$$

Derivate in x' ed y':

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x'} = -\frac{y'}{g^2}\dot{g}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} = -\eta\frac{\dot{g}}{g}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y'} = \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

Equazioni di Falkner-Skan

Derivate in x' ed y':

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x'} = -\frac{y'}{g^2} \dot{g} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} = -\eta \frac{\dot{g}}{g} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y'} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Equazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \, \partial y'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} = \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} + U'_e \frac{dU'_e}{dx'}$$

Nel seguito si userà Ue senza apice

Trasformazione singoli termini:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ f(\xi,\eta)\, U_e(\xi)\, g(\xi) \right\} = \frac{f'\, U_e\, g}{g} = \boxed{U_e f'}$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x'} = -\eta \frac{\dot{g}}{g} \frac{\partial \psi'}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi'}{\partial \xi} = -\frac{\dot{g}}{g} \eta U_e g f' + \dot{f}\, U_e g + f\, (\dot{U_e g}) = \boxed{-\dot{g} \eta U_e f' + \dot{f}\, U_e g + f\, (\dot{U_e g})}$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} = \frac{1}{g^2} f''\, U_e\, g = \boxed{\frac{1}{g} f''\, U_e}$$

$$\frac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} = \frac{1}{g^3} f'''\, U_e\, g = \boxed{\frac{1}{g^2} f'''\, U_e}$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \, \partial y'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ U_e f' \right\} = -\frac{\dot{g}}{g} \eta U_e f'' + \dot{f}' U_e + f' \dot{U}_e = \boxed{-\frac{\dot{g}}{g} \eta U_e f'' + (\dot{U_e f'})}$$

Equazioni di Falkner-Skan

Sostituisco nell'Equazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'\,\partial y'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} = \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} + U'_e \frac{dU'_e}{dx'}$$

$$\boxed{U_e f'} \quad \boxed{-\frac{\dot g}{g}\eta U_e f' + (U_e f')^{\cdot}} \quad \boxed{-\dot g \eta U_e f' + \dot f\, U_e g + f\,(U_e g)^{\cdot}} \quad \boxed{\frac{1}{g} f''\, U_e} \quad \boxed{\frac{1}{g^2} f'''\, U_e}$$

Opero una serie di semplificazioni e raggruppamenti ed ottengo:

$$f''' + g(U_e g)^{\cdot} f f'' + g^2 \dot U_e (1 - f'^2) = g^2 U_e f' \dot f' + g^2 U_e f'' \dot f = g^2 U_e (f' \dot f' + \dot f f'') = G(\xi,\eta)$$

Ponendo: $\alpha = g(U_e g)^{\cdot} = g^2 \dot U_e + g \dot g U_e = \beta + g \dot g U_e$ $\qquad \beta = g^2 \dot U_e$

Ottengo: $$f''' + \alpha(\xi) f f'' + \beta(\xi)(1 - f'^2) = G(\xi,\eta)$$

Per avere soluzioni simili è necessario che f(η). $\longrightarrow$ $G(\xi,\eta) = 0 \quad \alpha(\xi) = \text{cost} \quad \beta(\xi) = \text{cost}$

$$\left.\begin{array}{l} \beta + g\dot g U_e = A_1 \\ \beta = cost = A_2 \end{array}\right\rangle \Rightarrow g \dot g U_e = A_1 - \beta = A_1 - A_2 \longrightarrow g \dot g U_e = A \longrightarrow g \frac{dg}{d\xi} = A U_e^{-1}$$

Equazioni di Falkner-Skan

Per avere soluzioni simili è necessario che f(η). $\longrightarrow$ $G(\xi,\eta)=0 \quad \alpha(\xi)=\text{cost} \quad \beta(\xi)=\text{cost}$

$$\left.\begin{aligned}\beta + g\,\dot{g}U_e &= A_1\\ \beta = cost &= A_2\end{aligned}\right\rangle \Rightarrow g\,\dot{g}U_e = A_1 - \beta = A_1 - A_2 \longrightarrow g\,\dot{g}U_e = A \longrightarrow g\frac{dg}{d\xi} = AU_e^{-1}$$

Integro:

$$\int_0^g g\,dg = \int_0^\xi A\,U_e^{-1}(\xi)\,d\xi \qquad \frac{g^2}{2} = A\int_0^\xi U_e^{-1}(\xi)\,d\xi \longrightarrow \frac{g^2}{2} = A\int_0^\xi \xi^{-m}d\xi = \frac{A}{1-m}\xi^{1-m}$$

$$U_e(\xi) = \xi^m \Rightarrow \dot{U}_e = m\xi^{m-1}$$

$$g = \sqrt{\frac{2A}{(1-m)}}\,\xi^{\frac{1-m}{2}} \Rightarrow \dot{g} = \sqrt{\frac{1-m}{2}}\sqrt{A}\,\xi^{-\frac{1}{2}(1+m)}$$

Da cui: $\beta = g^2\dot{U}_e = \dfrac{2A}{(1-m)}\xi^{1-m}m\,\xi^{m-1} = \dfrac{2A\,m}{1-m}$

Assumendo:

$$A = \frac{1\text{-}m}{2} \longrightarrow \beta = m \longrightarrow \alpha = m + g\,\dot{g}U_e = m + A = m + \frac{1\text{-}m}{2} = \frac{m+1}{2}$$

Sostituendo:

$$\boxed{f''' + \frac{m+1}{2}ff'' + m\left(1 - f'^2\right) = 0}$$

Con BC

$$\begin{aligned} &f = f' = 0 && \text{per} \quad \eta = 0\\ &f' = 1 && \text{per} \quad \eta \to \infty \quad (\eta = 4 \div 5)\end{aligned}$$

Equazioni di Falkner-Skan

$$\boxed{f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m\left(1 - f'^2\right) = 0}$$

Con BC
$$f = f' = 0 \quad \text{per} \quad \eta = 0$$
$$f' = 1 \quad \text{per} \quad \eta \to \infty \quad (\eta = 4 \div 5)$$

Dalla:

$$g(\xi) = \sqrt{\frac{1\text{-}m}{(1-m)}}\sqrt{\xi^{1-m}} \Rightarrow \boxed{g(\xi) = \sqrt{\xi^{1-m}}}$$

Si ottiene per la coordinata y:

$$\eta = \frac{y'}{g(\xi)} = \boxed{y' \sqrt{\xi^{m-1}}}$$

Per lo sforzo tangenziale:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U \partial u'}{\delta \partial y'} = \mu \frac{U U_e'}{\delta g} \frac{\partial u's}{\partial \eta} = \mu \frac{U U'_e}{\delta g} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \boxed{\mu \frac{U U'_e}{\delta g} f''}$$

Il coefficiente di tensione alla parete:

$$C_\tau = \frac{\tau|_w}{q_\infty} = \frac{\tau|_w}{1/2\,\rho U^2} = 2\frac{UU'_e\mu}{\delta g \rho U^2} f''|_w = 2\frac{UU'_e\mu L}{\delta g \rho U^2 L} f''|_w = 2\frac{U'_e}{g}\frac{L}{\delta}\frac{\mu}{\rho U L} f''\Big|_w =$$

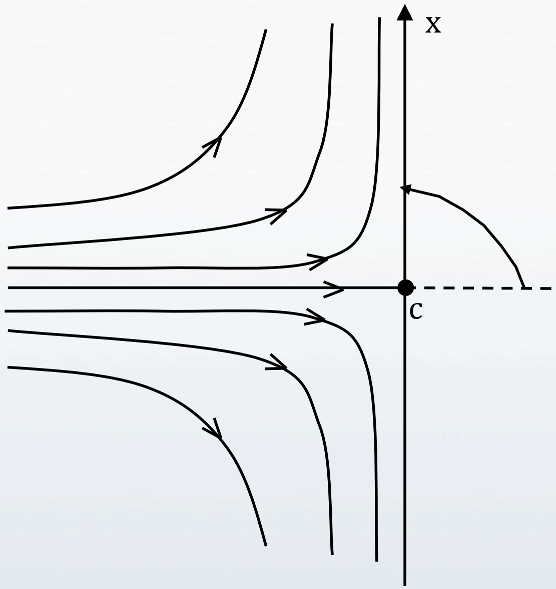
$$= 2\frac{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}{\mathrm{Re}_L}\frac{\xi^m}{\sqrt{\xi^{1-m}}} f''|_w = \boxed{2\xi^{\frac{1}{2}(3m-1)} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} f''|_w}$$

Condizioni nel flusso potenziale che determinano soluzioni simili per lo SL

m	0	1	-1
$U_e'(\xi)=\xi^m$	$U'_e(\xi)=\xi^0=1$	$U_e'(\xi)=\xi$	$U'_e(\xi)=\xi^{-1}$
U_e	$\overline{U}_e(x)=1\cdot\overline{U}=\overline{U}$	$U_e(x)=cx$ $V_e(y)=-cy$	$\overline{U}_e(x)=c\overline{x}^{-1}$
$f'''+\frac{m+1}{2}ff''+m\left(1-f'^2\right)=0$	$f'''+\frac{1}{2}ff''=0$	$f'''+ff''+(1-f'^2)=0$	$f'''+f'^2-1=0$
$g(\xi)=\sqrt{\xi^{1-m}}$	$g=\sqrt{\xi^1}=\xi^{1/2}$	$g=1$	$g=\sqrt{\xi^{1-m}}=\xi$
$\eta=y'\sqrt{\xi^{m-1}}$	$\eta=\frac{y'}{\sqrt{\xi}}$	$\eta=y'$	$\eta=\frac{y'}{\xi}$
$\delta(\xi)$	$\delta(\xi)=\delta(L)\xi^{1/2}$	$\delta(\xi)=\delta(L)$	$\delta(\xi)=\delta(L)\cdot\xi$
$C_\tau=2\xi^{\frac{1}{2}(3m-1)}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}f''\big\vert_w$	$C_\tau=\frac{2}{\sqrt{\xi}\sqrt{\mathrm{Re}_L}}f''\big\vert_w=\frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$c_\tau=\frac{2U'_e}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}f''\big\vert_w=\frac{2f''\vert_w}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}\xi$	$C_\tau=\frac{2f''\vert_w}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}\frac{1}{\xi^2}$
$C_D=\frac{D}{q_\infty S}=\int_0^1 2c_\tau\,d\xi$	$C_D=\frac{2.656}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$	-	-

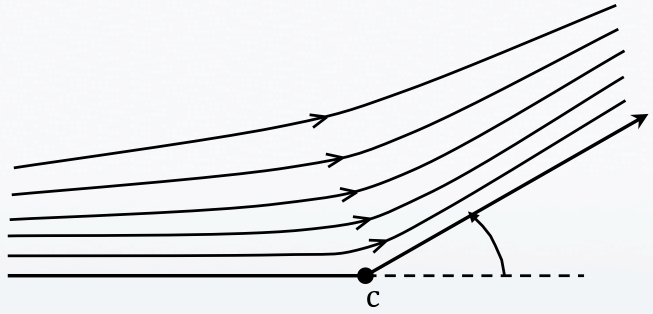
Condizioni nel flusso potenziale che determinano soluzioni simili per lo SL

m=1



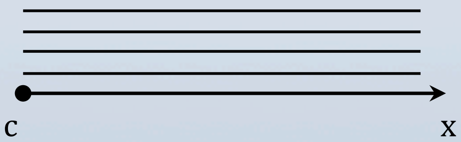
Flusso al ristagno

0<m<1



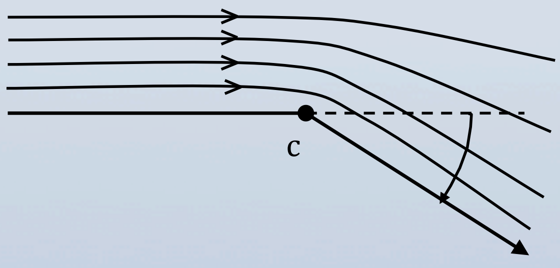
Parete convergente 2D

m=0



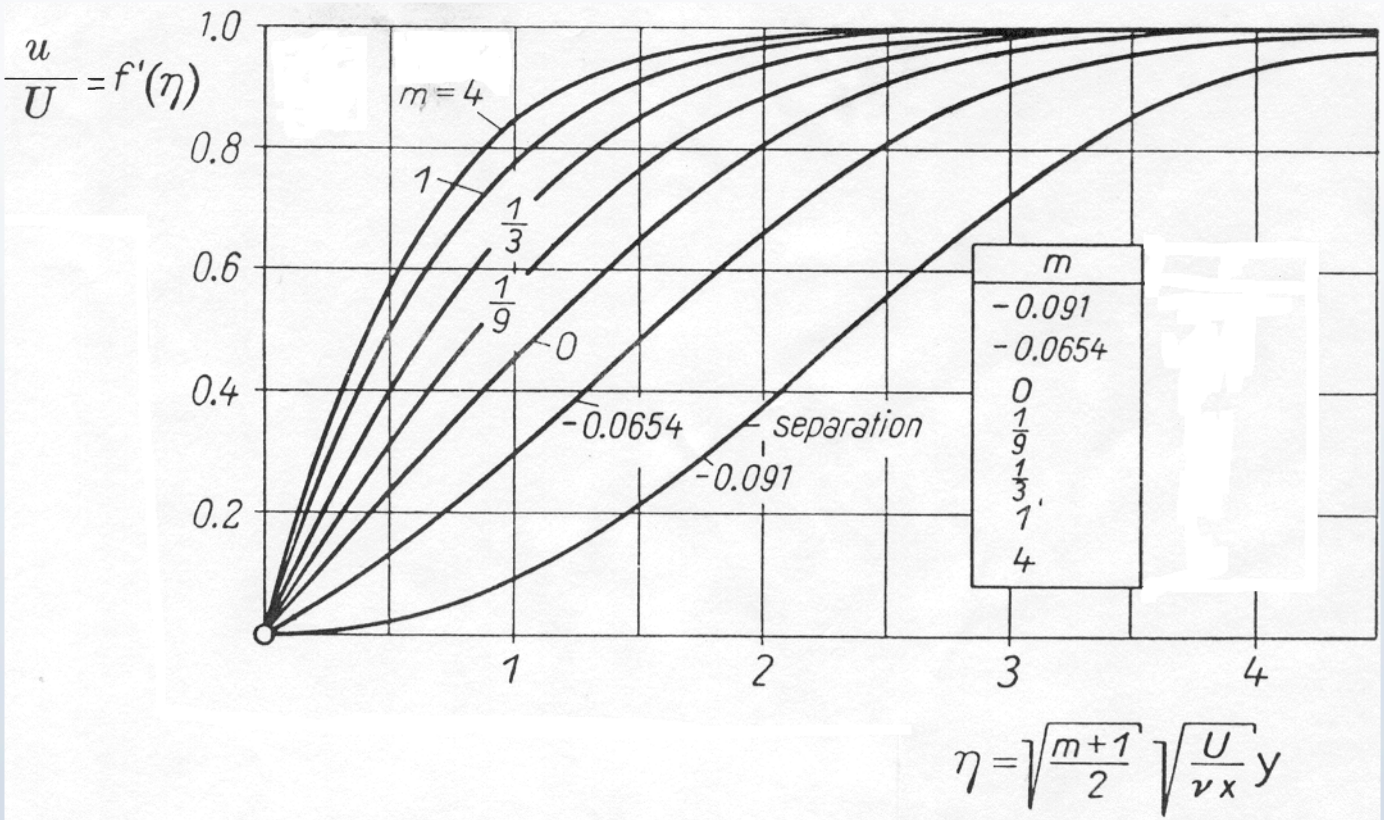
Lastra piana

-1<m<0



Parete divergente 2D 2D x

Condizioni nel flusso potenziale che determinano soluzioni simili per lo SL



Andamento della f' in funzione di η al variare di m.

Metodi integrali per lo strato limite

È preferibile avere dei metodi di calcolo approssimati da applicare in casi in cui la soluzione esatta dello strato limite non può essere raggiunta con una quantità di lavoro ragionevole.

Le equazioni di partenza trovate in precedenza sono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Con BC

$$u = v = 0 \;\; per \;\; y = 0$$
$$u = U_e \;\; per \;\; y \to \infty$$
$$u = u(y) \quad per \quad x = x_0$$

Integriamo l'equazione di conservazione della quantità di moto:

$$\int_{y=o}^{h}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - U_e\frac{dU_e}{dx}\right)dy = \frac{1}{\rho}\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

Integriamo l'ultimo termine

$$\frac{1}{\rho}\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{1}{\rho}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^h = -\frac{1}{\rho}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

Per cui:

$$\int_{y=o}^{h}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - U_e\frac{dU_e}{dx}\right)dy = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

Metodi integrali per lo strato limite

$$\int_{y=o}^{h}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-U_e\frac{dU_e}{dx}\right)dy=-\frac{\tau_w}{\rho}$$

Dall'equazione di conservazione della massa si ha:

$$\mathrm{v}=-\int_{o}^{y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy$$

Sostituisco:

$$\int_{y=o}^{h}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\int_{0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}dy-U_e\frac{dU_e}{dx}\right)dy=-\frac{\tau_w}{\rho}$$

Integrazione per parti

$$d(uv)=udv+vdu$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$\int_{y=o}^{h}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\int_{0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)dy=\left[u\int_{0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}dy\right]_{0}^{h}-\int_{0}^{h}u\frac{\partial u}{\partial x}dy=U_e\int_{0}^{h}\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int_{0}^{h}u\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$\int_{y=o}^{h}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}-U_e\frac{\partial u}{\partial x}-U_e\frac{dU_e}{dx}\right)dy=-\frac{\tau_w}{\rho}$$

Cambio segno

$$\int_{y=o}^{h}\left(-2u\frac{\partial u}{\partial x}+U_e\frac{\partial u}{\partial x}+U_e\frac{dU_e}{dx}\right)dy=\frac{\tau_w}{\rho}$$

Metodi integrali per lo strato limite

$$\int_{y=o}^{h}\left(-2u\frac{\partial u}{\partial x}+U_e\frac{\partial u}{\partial x}+U_e\frac{dU_e}{dx}+u\frac{dU_e}{dx}-u\frac{dU_e}{dx}\right)dy=\frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\int_{y=o}^{h}\frac{\partial}{\partial x}\left[u\,(U_e-u)\right]dy+\frac{dU_e}{dx}\int_{y=o}^{h}(U_e-u)dy=\frac{\tau_w}{\rho}$$

Ricordando che nell'incomprimibile:

$$U_e\delta_1=\int_0^\infty (U_e-u)\,dy$$

$$U_e^2\delta_2=\int_0^\infty u\,(U_e-u)\,dy$$

Si ottiene:

$$\boxed{\frac{d\,(U_e^2\,\delta_2)}{dx}+\delta_1 U_e\frac{dU_e}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Equazione di Von Karman

Riscrivendola:

$$U_e^2\frac{d\delta_2}{dx}+(2\delta_2+\delta_1)U_e\frac{dU_e}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho}$$

Per integrarla si deve conoscere f(η):

$$\frac{u}{U_e}=f(\eta)=a\eta+b\eta^2+c\eta^3+d\eta^4+e$$

Con BC

1) $\eta=y=0 \quad u=0 \quad \Rightarrow \quad e=0$

2) $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}=-U_e\frac{dU_e}{dx}$

3) $\eta\to\infty \quad y=\delta \quad u=U_e$

4) $\frac{\partial u}{\partial y}=0$

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Applicazione del metodo integrale ad una lastra piana ad incidenza zero

Consideriamo l'equazione integrale per la quantità di moto.

$$\frac{d(U_e^2\,\delta_2)}{dx} + \delta_1 U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Nel caso di una lastra piana: $U_e = U_\infty$

$$\frac{d(U_\infty^2\,\delta_2)}{dx} + \delta_1 U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \longrightarrow U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Lo sforzo di taglio alla parete è uguale alla perdita di quantità di moto nello SL

Da quanto visto precedentemente dalle soluzioni simili:

$$\frac{C_\tau}{2} = \frac{0.332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \longrightarrow \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = \alpha\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}}$$

Sostituiamo ed integriamo

$$d\delta_2 = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}\,dx \longrightarrow \delta_2 = \int_0^x \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}\,dx = \int_0^x \alpha\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\alpha\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\delta_2 = 2\alpha\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 2\alpha\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}}\,x = \boxed{2\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}\,x}$$

Ci dice come varia lo spessore della quantità di moto in funzione dello sforzo tangenziale alla parete lungo l'ascissa x

Applicazione del metodo integrale ad una lastra piana ad incidenza zero

L'essenza del metodo approssimato consiste nell'assumere un adatta espressione per la velocità nello strato limite. Si deve sempre tenere presente le condizioni che deve soddisfare questo andamento.

Per la lastra piana a zero incidenza ci si può avvalere delle condizioni di similarità:

$$\frac{u(y)}{U_\infty} = f(\eta) \qquad \text{Dove} \qquad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Dalla definizione di δ_2

$$U_\infty^2 \delta_2 = \int_0^\infty u\,(U_\infty - u)\,dy = U_\infty^2 \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right)dy$$

$$U_\infty^2 \delta_2 = U_\infty^2 \int_0^\infty f(1-f)\,dy = U_\infty^2 \delta \int_0^1 f(1-f)\,d\eta$$

Ponendo $\alpha_1 = \int_0^1 f(1-f)\,d\eta$

$$U_\infty^2 \delta_2 = U_\infty^2 \delta \alpha_1 \longrightarrow \boxed{\delta_2 = \delta \alpha_1}$$

Dalla definizione di δ_1

$$U_\infty \delta_2 = \int_0^\infty (U_\infty - u)\,dy = U_\infty \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right)dy$$

$$U_\infty \delta_2 = U_\infty \delta \int_0^1 (1-f)\,d\eta$$

Ponendo $\alpha_2 = \int_0^1 (1-f)\,d\eta$

$$U_\infty^2 \delta_1 = U_\infty^2 \delta \alpha_2 \longrightarrow \boxed{\delta_1 = \delta \alpha_2}$$

Applicazione del metodo integrale ad una lastra piana ad incidenza zero

Lo sforzo tangenziale alla parete:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu \frac{U_\infty}{\delta} f'(0) = \beta_1 \nu \frac{U_\infty}{\delta}$$

sostituendo

$$U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx} = \beta_1 \frac{\nu U_\infty}{\delta}$$

$$U_\infty^2 \alpha_1 \frac{d\delta}{dx} = \beta_1 \frac{\nu U_\infty}{\delta} \longrightarrow \delta \frac{d\delta}{dx} = \beta_1 \frac{\nu U_\infty}{U_\infty^2 \alpha_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\nu}{U_\infty}$$

integrando

$$\int_0^\delta \delta d\delta = \int_0^x \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\nu}{U_\infty} dx \longrightarrow \frac{\delta^2}{2} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\nu}{U_\infty} x \longrightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\beta_1}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty} x}}$$

Da cui

$$\tau_w = \frac{\rho \beta_1 \nu U_\infty}{\delta} = \boxed{\mu U_\infty \sqrt{\frac{\alpha_1 \beta_1}{2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}}$$

$$\boxed{\delta_1 = \alpha_2 \sqrt{\frac{2\beta_1}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty} x}}$$

I coefficienti a1, a2 e b1 possono essere calcolati se viene fissato un profilo di velocità a priori.

Scrivendo esplicitamente la funzione f(h) è necessario impostare le condizioni al contorno per la velocità.

Applicazione del metodo integrale ad una lastra piana ad incidenza zero

Esempi numerici

	BC
Funzione lineare	f(0)=0 f(1)=1
Funzione cubica	f(0)=0 f(1)=1 f′(1)=0 f″(0)=1
Funzione polinomiale di 4° grado	f(0)=0 f(1)=1 f′(1)=0 f″(0)=1 f″(1)=0

$\frac{u(y)}{U_\infty}=f(\eta)$	α_1	α_2	β_1	$\delta_1\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$\frac{\tau_w}{\mu U_\infty}\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}x}$	$\frac{\delta_1}{\delta_2}=H_{12}$
$f(\eta)=\eta$	1/6	1/2	1	1.732	0.289	3
$f(\eta)=\frac{3}{2}\eta-\frac{1}{2}\eta^3$	39/280	3/8	3/2	1.740	0.323	2.7
$f(\eta)=2\eta-2\eta^3+\eta^4$	37/315	3/10	2	1.752	0.343	2.55
$f(\eta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	(4-π)/2π	(π−2)/π	π/2	1.741	0.327	2.66
Esatta	-	-	-	1.729	0.332	2.61

Strato Limite Compressibile e Termico

Le soluzioni di un campo termico e di quello cinematico non sono in genere indipendenti fra loro. La conoscenza del campo di velocità è infatti sempre indispensabile per determinare il flusso di calore convettivo e quindi il campo termico. Viceversa non sempre la soluzione del campo cinematico dipende da quello termico.

Equazioni di governo

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0 \\ \rho\dfrac{D\vec{u}}{Dt} + \nabla P = \mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \rho\vec{g} \\ \boxed{\rho C_p\dfrac{DT}{Dt} - \dfrac{DP}{Dt} = k\nabla^2 T + \mu\phi} \end{cases}$$

Dove:

$$\phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

L'ultima equazione nel caso compressibile 2D stazionario:

$$\rho C_p(\vec{u}\cdot\nabla)T - (\vec{u}\cdot\nabla)P = k\nabla^2 T + \mu\phi$$

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \mu\phi$$

Dove:

$$\phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

Adimensionalizzazione Equazione Energia

Quantità adimensionali

$$x' = \frac{x}{L} \qquad y' = \frac{y}{\delta} \qquad u' = \frac{u}{U} \qquad v' = \frac{v}{V} \qquad P' = \frac{P}{P_0} \qquad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad T' = \frac{T - T_{rif}}{T_{\max} - T_{rif}} = \frac{T - T_\infty}{T_{\max} - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}$$

Equazioni Energia

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \mu\phi \quad \text{e} \quad \phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$\rho_0 C_p\left(\frac{U\Delta T}{L}\rho' u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{V\Delta T}{\delta}\rho' v'\frac{\partial T'}{\partial y'}\right) - \left(\frac{UP_0}{L}u'\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{VP_0}{\delta}v'\frac{\partial P'}{\partial y'}\right) = k\frac{\Delta T}{L^2}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}\right) + \mu\phi'$$

$$\phi' = 2\left[\frac{U^2}{L^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \frac{V^2}{\delta^2}\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2\right] + \left(\frac{V}{L}\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{U}{\delta}\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{U}{L}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V}{\delta}\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2$$

Moltiplico tutto per: $\dfrac{L}{\rho_0 C_p U \Delta T}$

Termini a sinistra:

$$\rho' u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{VL}{U\delta}\rho' v'\frac{\partial T'}{\partial y'} - \frac{L}{\rho_0 C_p U\Delta T}\frac{UP_0}{L}\left(u'\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{VL}{U\delta}v'\frac{\partial P'}{\partial y'}\right) = \rho' u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + \rho' v'\frac{\partial T'}{\partial y'} - \frac{U^2}{C_p\Delta T}\frac{P_0}{\rho_0 U^2}\left(u'\frac{\partial P'}{\partial x'} + v'\frac{\partial P'}{\partial y'}\right) =$$

$$\boxed{\rho' u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + \rho' v'\frac{\partial T'}{\partial y'} - \frac{Ec}{Ru}\left(u'\frac{\partial P'}{\partial x'} + v'\frac{\partial P'}{\partial y'}\right) =}$$

Ec: Misura gli effetti di dissipazione nel flusso. Per piccole velocità si trascura.

Ru: Effetti cavitazione. Pressione troppo piccola rispetto a quella dinamica.

Adimensionalizzazione Equazione Energia

2° Membro:

$$=\frac{L}{\rho_0 C_p U\Delta T}k\frac{\Delta T}{L^2}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}+\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}\right)+\frac{L}{\rho_0 C_p U\Delta T}\mu\phi'$$

1° Termine:

$$\frac{k}{\mu C_p}\frac{\mu}{\rho_0 LU}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}+\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}\right)=\boxed{\frac{1}{\Pr\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}+\mathrm{Re}\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}\right)}$$

Pr: rapporto della diffusività della quantità di moto e della diffusione termica.

2° Termine:

$$2\frac{L}{\rho_0 C_p U\Delta T}\frac{\mu U^2}{L^2}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\frac{V^2L^2}{U^2\delta^2}\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2\right]+\frac{L}{\rho_0 C_p U\Delta T}\frac{\mu U^2}{L^2}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial v'}{\partial x'}+\frac{L}{\delta}\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{L}{\rho_0 C_p U\Delta T}\frac{\mu U^2}{L^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{VL}{U\delta}\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2$$

$$2\frac{\mu}{\rho_0 UL}\frac{U^2}{C_p\Delta T}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2\right]+\frac{\mu}{\rho_0 UL}\frac{U^2}{C_p\Delta T}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial v'}{\partial x'}+\sqrt{\mathrm{Re}}\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{\mu}{\rho_0 UL}\frac{U^2}{C_p\Delta T}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2$$

$$\boxed{2\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2\right]+\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial v'}{\partial x'}+\sqrt{\mathrm{Re}}\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2}$$

Quindi ottengo:

$$\rho' u'\frac{\partial T'}{\partial x'}+\rho' v'\frac{\partial T'}{\partial y'}-\frac{Ec}{Ru}\left(u'\frac{\partial P'}{\partial x'}+v'\frac{\partial P'}{\partial y'}\right)=\frac{1}{\Pr\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}+\mathrm{Re}\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}\right)+2\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2\right]+\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial v'}{\partial x'}+\sqrt{\mathrm{Re}}\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2$$

Strato Limite Compressibile e Termico

Equazioni di governo

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0 \\ \rho\dfrac{D\vec{u}}{Dt} + \nabla P = \mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \rho\vec{g} \\ \rho C_p\dfrac{DT}{Dt} - \dfrac{DP}{Dt} = k\nabla^2 T + \mu\phi \end{cases}$$

Equazioni di governo adimensionalizzate

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho'}{Dt'} + \rho'\nabla\cdot\vec{u}' = 0 \\ \rho'\dfrac{D\vec{u}'}{Dt'} + \dfrac{1}{Ru}\nabla P' = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\mu\nabla^2\vec{u}' + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}')\right] + \dfrac{1}{Fr^2}(\rho'-1)\vec{k} \\ \rho'\dfrac{DT'}{Dt'} - \mathrm{Ec}\dfrac{DP'}{Dt'} = \dfrac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\nabla^2 T' + \dfrac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\phi' \end{cases}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze viscose}}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{U_0}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forza galleggiamento}}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\text{diffusività quantità di moto}}{\text{diffusività termica}}$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{U_0^2}{C_p\Delta T} = \frac{\text{Energia cinetica}}{\text{entalpia}}$$

$$\mathrm{Ru} = \frac{\rho U_0^2}{P_0} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze pressione}}$$

Equazioni di governo al variare della velocità all'infinito

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho'}{Dt'} + \rho'\nabla\cdot\vec{u}' = 0 \\ \rho'\dfrac{D\vec{u}'}{Dt'} + \dfrac{1}{Ru}\nabla P' = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\mu\nabla^2\vec{u}' + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}')\right] + \dfrac{1}{Fr^2}(\rho'-1)\vec{k} \\ \rho'\dfrac{DT'}{Dt'} - \mathrm{Ec}\dfrac{DP'}{Dt'} = \dfrac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\nabla^2 T' + \dfrac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\phi' \end{cases}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze viscose}}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{U_0}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forza galleggiamento}}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\text{diffusività quantità di moto}}{\text{diffusività termica}}$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{U_0^2}{C_p \Delta T} = \frac{\text{Energia cinetica}}{\text{entalpia}}$$

$$\mathrm{Ru} = \frac{\rho U_0^2}{P_0} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze pressione}}$$

Convezione Naturale $\mathrm{U}_\infty = 0$

È questo il caso in cui il flusso non è dotato di velocità propria ed il moto è originato dalla forza di galleggiamento conseguente alle differenze di densità.

Assumendo come velocità di adimemsionalizzazione: $U_0 = \dfrac{\upsilon}{L}$

$$\nabla\cdot\vec{u}' = 0$$

$$\frac{D\vec{u}'}{Dt'} + \nabla P' = \nabla^2\vec{u}' + \mathrm{Gr}(T' - T_\infty')\vec{k}$$

$$\frac{DT'}{Dt'} - = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla^2 T'$$

$$\mathrm{G}r = \frac{\beta\Delta T_0 g L^3}{\nu^2} = \frac{\text{forze galleggiamento}}{\text{forze viscose}}$$

Il campo cinematico dipende da quello termico tramite il termine di galleggiamento e pertanto le equazioni sono tutte accoppiate tra di loro e devono essere risolte contemporaneamente

Equazioni di governo al variare della velocità all'infinito

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho'}{Dt'} + \rho'\nabla\cdot\vec{u}' = 0 \\ \rho'\dfrac{D\vec{u}'}{Dt'} + \dfrac{1}{Ru}\nabla P' = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\mu\nabla^2\vec{u}' + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}')\right] + \dfrac{1}{Fr^2}(\rho'-1)\vec{k} \\ \rho'\dfrac{DT'}{Dt'} - \mathrm{Ec}\dfrac{DP'}{Dt'} = \dfrac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\nabla^2 T' + \dfrac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\phi' \end{cases}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze viscose}}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{U_0}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forza galleggiamento}}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\text{diffusività quantità di moto}}{\text{diffusività termica}}$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{U_0^2}{C_p \Delta T} = \frac{\text{Energia cinetica}}{\text{entalpia}}$$

$$\mathrm{Ru} = \frac{\rho U_0^2}{P_0} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze pressione}}$$

Flussi a bassa velocità $M_\infty < 0.3$

Anche in questo caso si può trascurare la dipendenza dalla densità sia dalla pressione che dalla temperatura. Fr è grande si può trascurare il galleggiamento. Ec è piccolo.

$$\nabla\cdot\vec{u}' = 0$$

$$\frac{D\vec{u}'}{Dt'} + \nabla P' = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{u}'$$

$$\frac{DT'}{Dt'} - = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\nabla^2 T'$$

Le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto non dipendono dalla temperatura ed il campo cinematico può quindi essere risolto indipendentemente da quello termico.

Equazioni di governo al variare della velocità all'infinito

$$
\begin{cases}
\dfrac{D\rho'}{Dt'} + \rho'\nabla\cdot\vec{u}' = 0 \\
\rho'\dfrac{D\vec{u}'}{Dt'} + \dfrac{1}{Ru}\nabla P' = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\mu\nabla^2\vec{u}' + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}')\right] + \dfrac{1}{Fr^2}(\rho'-1)\vec{k} \\
\rho'\dfrac{DT'}{Dt'} - \mathrm{Ec}\dfrac{DP'}{Dt'} = \dfrac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\nabla^2 T' + \dfrac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\phi'
\end{cases}
$$

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze viscose}}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{U_0}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forza galleggiamento}}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\text{diffusività quantità di moto}}{\text{diffusività termica}}$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{U_0^2}{C_p \Delta T} = \frac{\text{Energia cinetica}}{\text{entalpia}}$$

$$\mathrm{Ru} = \frac{\rho U_0^2}{P_0} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze pressione}}$$

Flussi a velocità intermedie $0.3 < M_\infty < 1$

Non si può adottare l'ipotesi di incomprimibilità ma è ancora lecito trascurare la dipendenza della densità dalla temperatura. Ec è di ordine 1. il termine dissipativo può essere ancora trascurato.

$$\frac{D\rho'}{Dt'} + \rho'\nabla\cdot\vec{u}' = 0$$

$$\rho'\frac{D\vec{u}'}{Dt'} + \nabla P' = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\mu\nabla^2\vec{u}' + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}')\right]$$

$$\rho'\frac{DT'}{Dt'} - \mathrm{Ec}\frac{DP'}{Dt'} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\nabla^2 T'$$

Anche in questo caso il campo cinematico non dipende da quello termico che può essere risolto separatamente

Equazioni di governo al variare della velocità all'infinito

$$
\begin{cases}
\dfrac{D\rho'}{Dt'} + \rho'\nabla\cdot\vec{u}' = 0 \\
\rho'\dfrac{D\vec{u}'}{Dt'} + \dfrac{1}{Ru}\nabla P' = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\mu\nabla^2\vec{u}' + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}')\right] + \dfrac{1}{Fr^2}(\rho'-1)\vec{k} \\
\rho'\dfrac{DT'}{Dt'} - \mathrm{Ec}\dfrac{DP'}{Dt'} = \dfrac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\nabla^2 T' + \dfrac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\phi'
\end{cases}
$$

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze viscose}}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{U_0}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forza galleggiamento}}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\text{diffusività quantità di moto}}{\text{diffusività termica}}$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{U_0^2}{C_p\Delta T} = \frac{\text{Energia cinetica}}{\text{entalpia}}$$

$$\mathrm{Ru} = \frac{\rho U_0^2}{P_0} = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze pressione}}$$

Flussi ad alta velocità $M_\infty > 1$

Le variazioni di temperatura all'interno del campo sono talmente grandi da non poter più trascurare le variazioni di densità che ne conseguono. Anche i coefficienti di viscosità e conducibilità non possono più essere ritenuti costanti in quanto variano con la temperatura. Il campo cinematico dipende da quello termico pertanto devono essere risolti simultaneamente.

$$\frac{D\rho'}{Dt'} + \rho'\nabla\cdot\vec{u}' = 0$$

$$\rho'\frac{D\vec{u}'}{Dt'} + \nabla P' = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\mu\nabla^2\vec{u}' + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}')\right]$$

$$\rho'\frac{DT'}{Dt'} - \mathrm{Ec}\frac{DP'}{Dt'} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\nabla^2 T'$$

$$\mu = \mu(T)$$

$$k = k(T)$$

SLT Equazione

Equazione di partenza

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = k\nabla^2 T + \mu\phi \qquad \phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

Nel caso compressibile 2D stazionario:

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \mu\phi \qquad \phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

Adimensionalizzando:

$$\rho' u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + \rho' v'\frac{\partial T'}{\partial y'} - \frac{Ec}{Ru}\left(u'\frac{\partial P'}{\partial x'} + v'\frac{\partial P'}{\partial y'}\right) = \frac{1}{\Pr \mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \mathrm{Re}\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2\right] + \frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial v'}{\partial x'} + \sqrt{\mathrm{Re}}\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2 - \frac{2}{3}\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2$$

Facendo il limite per Re che tende all'infinito:

$$\rho' u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + \rho' v'\frac{\partial T'}{\partial y'} - \frac{Ec}{Ru}u'\frac{\partial P'}{\partial x'} = \frac{1}{\Pr}\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \mathrm{Ec}\left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2$$

In forma dimensionale:

$$\boxed{\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = u\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

Analogia termica

Consideriamo un flusso uniforme lungo una lastra piana (variazioni di pressione nulle lungo x) avente temperatura uniforme.

Ipotizziamo una velocità sufficientemente piccola e Pr=1 (buona approssimazione per gas). Le equazioni di governo sono.

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{u}' = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{D\vec{u}'}{Dt'} + \nabla P' = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \vec{u}' \rightarrow \frac{D\vec{u}'}{Dt'} + = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \vec{u}' \rightarrow \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{DT'}{Dt'} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \nabla^2 T' \qquad \frac{DT'}{Dt'} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 T' \qquad \rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

Assumiamo la temperatura adimensionale:

$$T' = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$$

Condizioni al contorno:

$$y = 0 \qquad T' = 0 \qquad u' = 0$$

$$y \to \infty \qquad T' \to 1 \qquad u' \to \infty$$

Le soluzioni sono uguali:

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \qquad T = \frac{u}{U_\infty}(T_\infty - T_w) + T_w$$

Il campo termico è noto una volta che sia noto il campo cinematico.

Analogia termica

Quello che interessa principalmente sono i valori dello sforzo di taglio alla parete e dello scambio termico.

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \qquad q = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Il flusso di calore sarà.

$$q = k\frac{\left(T_w - T_\infty\right)}{U_\infty}\frac{\tau}{\mu}$$

Esprimendo lo sforzo di taglio in funzione del coefficiente di attrito:

$$\tau = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 C_\tau$$

Ed il flusso di calore in funzione del coefficiente di adduzione h:

$$q = h\left(T_w - T_\infty\right)$$

Risulta:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{1}{2}C_\tau \mathrm{Re}_x \qquad \mathrm{Nu} = \frac{hx}{k} = \frac{\text{coefficiente di scambio termico convettivo}}{\text{coefficiente di scambio termico per convezione}}$$

Per una lastra piana:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

Effetto Pr

$$\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\text{diffusività quantità di moto}}{\text{diffusività termica}}$$

Il numero di Pr ci da informazioni sullo spessore dello SL cinematico rispetto a quello termico.

Se un fluido ha una viscosità alta, ciò indica che ha una forte predisposizione a trasportare quantità di moto. Di conseguenza lo spessore dello SL cinematico sarà più grande rispetto al termico.

Pr=1 è una buona approssimazione per i gas perfetti e significa che i due strati limite sono confrontabili.

	$\text{Pr} = 1$	$\text{Pr} \to 0$	$\text{Pr} \to \infty$
Fluido	Gas perfetti	Metalli liquidi	Olii
$T_w > T_\infty$	$\delta_{th} = o(\delta)$	$\delta_{th} > \delta$	$\delta_{th} < \delta$
$T_w < T_\infty$	$\delta_{th} = o(\delta)$	$\delta_{th} > \delta$	$\delta_{th} < \delta$

Per Pr che tende a o e quindi $\delta_{th} >> \delta$ nell'equazione dell'energia al posto delle velocità posso sostituire i valori della zona esterna.

Si possono trovare le seguenti equazioni:

$$\text{Nu} \propto \text{Pr}^{1/2} \qquad \text{Pr} \to 0 \qquad T_w = \text{cost}$$

$$\text{Nu} \propto \text{Pr}^{1/3} \qquad \text{Pr} \to \infty \qquad T_w = \text{cost}$$

Fluid	Pr
Liquid Metals	0.0004-0.03
Gas	0.7-1
Water	1.7-13.7
Oils	50-100'000
Glycerin	2'000-100'000

Soluzioni simili SLT

Vista l'esistenza di soluzioni simili per lo SL cinematico è presumibile che ne esistano anche per il termico. Infatti applicando procedimenti analoghi si ottiene:

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m\left(1 - f'^2\right) = 0$$

$$(T')'' + \frac{m+1}{2} f (T')' \mathrm{Pr} - n(T') f' \mathrm{Pr} = -\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec} x^{2m-n} f''^2 \qquad T_w(x) - T_\infty = T_1 x^n$$

$$\eta = 0 \quad T' = 1 \qquad\qquad \eta \to \infty \quad T' = 0$$

Se l'effetto del riscaldamento (2° membro) è trascurabile le soluzioni sono simili.

Per una lastra piana m=0 e n=0 (temperatura costante).

$$\begin{cases} f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \\ (T')'' + \frac{1}{2} f (T')' \mathrm{Pr} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathrm{Pr}=1} \begin{cases} f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \\ (T')'' + \frac{1}{2} f (T')' = 0 \end{cases} \longrightarrow f' = 1 - T'$$

Da cui:

$$f' = 1 - T' = 1 - \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$$

$$\boxed{f' = \frac{u}{U_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}}$$

Analogia termica

Metodi integrali SLT

Come per lo SL cinematico anche in questo caso si può usare un metodo integrale per il calcolo approssimato del trasferimento di calore. Si parte come al solito dall'equazione dell'energia integrando da y=o a y=h (con h>> δ_{th}). Si ottiene:

$$\frac{d}{dx}\left[\Delta T\, U_e(x)\delta_{th}(x)\right] = \frac{q_w}{\rho C_p}$$

Con:

$$\delta_{th} = \int_0^\infty \frac{u}{U_e}\left(\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}\right)dy$$

E con:

$$q_w = -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_w$$

Anche in questo caso si assegna una funzione di forma:

$$T' = T'(\eta) = \sum_i b_i \eta^i$$

Effetto della dissipazione SLT Incomp.

L'equazione dell'energia è:

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\boxed{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

Introducendo:

$$\overline{T}=\frac{T-T_\infty}{U_\infty^2/2C_p}\qquad T'=\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}\qquad \overline{T}=\frac{T_w-T_\infty}{U_\infty^2/2C_p}T'=\frac{2C_p\Delta T}{U_\infty^2}T'=2\frac{T'}{\mathrm{Ec}}$$

Sostituendo nell'equazione dell'energia in termini adimensionali:

$$u'\frac{\partial T'}{\partial x'}+v'\frac{\partial T'}{\partial y'}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}+\mathrm{Ec}\left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2\qquad \frac{\mathrm{Ec}}{2}u'\frac{\partial \overline{T}}{\partial x'}+\frac{\mathrm{Ec}}{2}v'\frac{\partial \overline{T}}{\partial y'}=\frac{\mathrm{Ec}}{2}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2}+\mathrm{Ec}\left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2$$

$$u'\frac{\partial \overline{T}}{\partial x'}+v'\frac{\partial \overline{T}}{\partial y'}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2$$

Con BC: $y'=0 \quad \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial y'}=0 \qquad y'\to\infty \quad \overline{T}=0$

Alla parete si ha:

$$\left.\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2}\right|_w=-2\left.\left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2\right|_w \xrightarrow{\text{Parete Adiabatica}} \overline{T}_w=\frac{T_{ad}-T_\infty}{U_\infty^2/2C_p}=\overline{T}_w(x',\mathrm{Pr})=\boxed{r(x',\mathrm{Pr})}$$

Recovery factor ci dice quanta energia meccanica viene recuperata come termica attraverso lo SLT.

Per una lastra piana e Pr=1:

$$r(\mathrm{Pr})=1-\left.f'^2\right|_w=1\qquad \overline{T}_w=1$$

L'aumento di temperatura della parete dovuta alla dissipazione è proprio uguale all'incremento dovuto alla compressione adiabatica.